作用素の定理

“重回積分級数”とでも呼ぶべき作用素に関する定理を発見したので紹介したい。

＜ 作用素(∫−∫^3+∫^5−∫^7+ ・・・)に関する定理 ＞

定理5

G(x)は、べき級数展開したとき収束半径がrである関数とすると、その半径内のxにおいて次が成り立つ。

(sinx∫sinx+cosx∫cosx)G(x)dx＝(∫−∫^3+∫^5−∫^7+・・・)G(x)

ここで∫の積分範囲はすべて 0〜x である。

(注意)右辺は∫G(x)dx−∫∫∫G(x)dxdxdx+ ∫∫∫∫∫G(x)dxdxdxdxdx − ・・・を略した書き方である。例えば∫^3 は積分∫を3回繰り返す重回積分(高階積分)を表す。

この定理は、無限次の積分作用素(級数)を有限次の積分に圧縮するものともいえる。
例えば、この定理を使うと、G(x)=sinx とした場合、(∫−∫^3+∫^5−∫^7+・・・)sinx を計算していたらたいへんだが、左辺から、それは (x/2)・sinx とたちまち求まるのである。
上記定理からさらに次の定理が出る。

定理5−A

G(x)は、べき級数展開したとき収束半径がrである関数とすると、その半径内のxにおいて次が成り立つ。

(∫−∫^3+∫^5−∫^7+・・・)G(x)を計算した結果は、微分方程式 f´´(x)+ f(x)＝G(x)の特解 f1(x)を求め、f´1(x)+sinx・f1(0)−cosx・f´1(0) を計算したものに等しい。

(注意) (∫−∫^3+∫^5−∫^7+・・・)G(x)は、∫G(x)dx−∫∫∫G(x)dxdxdx+ ∫∫∫∫∫G(x)dxdxdxdxdx − ・・・を略した書き方である。例えば∫^3 は積分∫を3回繰り返す重回積分(高階積分)を表す。∫の積分範囲はすべて 0〜x である。

これは「無限次の積分の世界」と「有限次の微分方程式の世界」を結びつける定理といえる。
異質な世界に橋をかける定理なのである。
例えば、定理 5−A を使うと、G(x)=x^2 とした場合、微分方程式f´´(x)+f(x)=x^2 の特解f1(x)はf1(x)=x^2−2 とすぐわかるので、次のようにたちまち求まる。
(∫−∫^3+∫^5−∫^7+・・・)x^2 = 2(x−sinx)

定理5は、http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page214.htm で示した次の二つのものと同類のものとなっている。
これらはかなり以前に発見したものである。

定理3（作用素の定理）

G(x)は、べき級数展開したとき収束半径がrである関数とすると、その半径内のxにおいて次が成り立つ。

e^x∫e^(−x)G(x)dx＝(∫+∫^2+∫^3+･･･)G(x)

ここで∫の積分範囲はすべて0～xである。

（注意）右辺は∫G(x)dx+∫∫G(x)dxdx+∫∫∫G(x)dxdxdx +･･を略した書き方である。∫^2は∫∫の2回積分、∫^3は∫∫∫の3回積分･･などの重回積分（高階積分）を表す。

定理4（作用素の定理）

G(x)はべき級数展開したとき収束半径がrである関数とすると、その半径内のxにおいて次が成り立つ。

e^(−x)∫e^x G(x)dx＝(∫−∫^2+∫^3−∫^4+･･･)G(x)

ここで∫の積分範囲はすべて0～xである。

（注意）右辺は∫G(x)dx−∫∫G(x)dxdx+∫∫∫G(x)dxdxdx−･･を略した書き方である。∫^2は∫∫の2回積分、∫^3は∫∫∫の3回積分などの重回積分（高階積分）を表す。

一方、定理5−Aは、次のもの（これらもかなり以前に発見していた）と同類となっている。
定理5−Aと下の定理との違いは、微分方程式が1階か2階かという違いである。その違いは積分作用素級数の隣同士の項における積分次数の差に関係していると考えられる。

定理2

G(x)は、べき級数展開したとき収束半径がrである関数とすると、その半径内のxにおいて次が成り立つ。

(∫+∫^2+∫^3+∫^4+･･･)G(x)を計算した結果は、微分方程式 f′(x)−f(x)＝G(x)の特解（特殊解）f1(x)を求め、f1(x)−f1(0)･e^x を計算したものに等しい。

（注意）（∫−∫^3+∫^5−∫^7+･･･)G(x)は、∫G(x)dx+∫∫G(x)dxdx+∫∫∫G(x)dxdxdx +･･を略した書き方である。

∫^2は∫∫の2回積分、∫^3は∫∫∫の3回積分･･などの重回積分（高階積分）を表す。∫の積分範囲はすべて0～xである。

定理2-2

G(x)は、べき級数展開したとき収束半径がrである関数とすると、その半径内のxにおいて次が成り立つ。

(∫−∫^2+∫^3−∫^4+・・・)G(x)を計算した結果は、微分方程式 f′(x)+f(x)=G(x) の特解(特殊解)f1(x)を求め、f1(x)−f1(0)・e^(−x) を計算したものに等しい。

(注意) (∫−∫^3+∫^5−∫^7+・・・)G(x)は、∫G(x)dx−∫∫G(x)dxdx+∫∫∫G(x)dxdxdx −・・を略した書き方である。

∫^2 は∫∫の 2 回積分、∫^3 は∫∫∫の 3 回積分・・などの重回積分(高階積分)を表す。∫の積分範囲はすべて 0~x である。

さて、定理5−A を再掲しよう。

定理5−A

G(x)は、べき級数展開したとき収束半径がrである関数とすると、その半径内のxにおいて次が成り立つ。

(∫−∫^3+∫^5−∫^7+・・・)G(x)を計算した結果は、微分方程式 f′′(x)+f(x)=G(x)の特解 f1(x)を求め、f′1(x)+sinx・f1(0)−cosx・f′1(0) を計算したものに等しい。

(注意) (∫−∫^3+∫^5−∫^7+・・・)G(x)は、∫G(x)dx−∫∫∫G(x)dxdxdx+ ∫∫∫∫∫G(x)dxdxdxdxdx − ・・・を略した書き方である。

例えば∫^3 は積分∫を3回繰り返す重回積分(高階積分)を表す。∫の積分範囲はすべて 0~x である。

いまG(x)=sinx として、(∫−∫^3+∫^5−∫^7+・・・)sinx を計算したいとする。これを直接計算していたら大変である。
そこで定理5−A を用いる。
f′′(x)+f(x)=sinx の特解(特殊解とも特別解ともいう)f1(x)は、基本解から類推したりして、割合簡単にf1(x)=(−x/2)cosx と求めることができる。これから、f′1(x)+sinx・f1(0)−cosx・f′(0)を計算することで、
(∫−∫^3+∫^5−∫^7+・・・)sinx=(x/2)sinx
とすぐに求まるのである。
こういう計算もいいのだが、**定理5−A は、なんといっても「有限次の微分方程式」と「無限次の積分」という別世界の関係性を示したものであり、数学の深い構造をあぶり出した定理であるともいえる。**

上記定理の証明は次サイトに掲載しているので参照いただきたい。なお今回掲載した内容は下記サイトとほぼ同じものである。
http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page215.htm
http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page030.htm
http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page029.htm

2012 年 3 月 17 日
杉岡幹生