ラマヌジャンの和について(その3)

T.N.

1.テータ関数とペー関数

(その1)、(その2)における課題であった

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(e^{2\pi n}-1)}=-\frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}\log 2-\frac{1}{2}\log\left(\frac{\omega_{(4)}}{\pi}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left((-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1\right)}=?$$

を求める方法がわかったので書いておく。以下の内容はほとんど[1]、[2]によるので、結果だけ知りたければ読み飛ばしても構わない。

天下り的であるがテータ関数の定義を次で与えよう。$q=e^{\tau\pi i}$として

$$\vartheta_1(v;\tau)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\sin(2n+1)\pi v$$

$$\vartheta_2(v;\tau)=2\sum_{n=0}^{\infty}q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\cos(2n+1)\pi v$$

$$\vartheta_3(v;\tau)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\cos 2n\pi v$$

$$\vartheta_4(v;\tau)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2n\pi v$$

またこれらの無限乗積展開は

$$\vartheta_1(v;\tau)=2q^{\frac{1}{4}}q_0\sin(\pi v)\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n}\cos 2\pi v+q^{4n})$$

$$\vartheta_2(v;\tau)=2q^{\frac{1}{4}}q_0\cos(\pi v)\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n}\cos 2\pi v+q^{4n})$$

$$\vartheta_3(v;\tau)=q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n-1}\cos 2\pi v+q^{4n-2})$$

$$\vartheta_4(v;\tau)=q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n-1}\cos 2\pi v+q^{4n-2})$$

となる。但し

$$q_0=q_0(\tau)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$$

である。上では定数的な扱いをしているが、q_0はτの関数であることに注意する。簡単のため

$$q_1=\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n}),\quad q_2=\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}),\quad q_3=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})$$

とおくと、もちろんこれらもτの関数であって

$$\vartheta_1(0;\tau)=0,\quad \vartheta_2(0;\tau)=2q^{\frac{1}{4}}q_0{q_1}^2,\quad \vartheta_3(0;\tau)=q_0{q_2}^2,\quad \vartheta_4(0;\tau)=q_0{q_3}^2$$

となることがわかる。また$\vartheta_1(v;\tau)$の両辺をvで割ってからvを 0 に近づけた極限を考えることで

$$\vartheta_1{}'(0;\tau)=2\pi q^{\frac{1}{4}}{q_0}^3$$

となることにも注意しておく。さて、本題のテータ関数とペー関数の関係はというと

$$\sqrt{\wp(u;\omega_1,\omega_2)-e_k}=\frac{1}{\omega_1}\frac{\vartheta_1{}'(0;\tau)}{\vartheta_{k+1}(0;\tau)}\frac{\vartheta_{k+1}(v;\tau)}{\vartheta_1(v;\tau)},\quad v=\frac{u}{\omega_1},\quad \tau=\frac{\omega_2}{\omega_1}\quad (k=1,2,3)$$

が成り立つ。証明は[1]を見てほしい。

ペー関数は既に述べたように二重周期関数であり、上ではその周期をω_1,ω_2としているが、定数e_kは

$$\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right)=e_1\quad \wp\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)=e_2\quad \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right)=e_3$$

により定まり、かつ互いに相異なる。(積分

$$u=\int_x^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}=\int_x^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}$$

の逆関数としての$x=\wp(u)$に注意しておく。) これとテータ関数に対して成り立つ恒等式

$$\vartheta_1\left(v+\frac{1}{2};\tau\right)=\vartheta_2(v;\tau),\quad \vartheta_2\left(v+\frac{1}{2};\tau\right)=-\vartheta_1(v;\tau),\quad \vartheta_3\left(v+\frac{1}{2};\tau\right)=\vartheta_4(v;\tau),\quad \vartheta_4\left(v+\frac{1}{2};\tau\right)=\vartheta_3(v;\tau)$$

$$\vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2};\tau\right)=i\alpha\vartheta_4(v;\tau),\quad \vartheta_2\left(v+\frac{\tau}{2};\tau\right)=\alpha\vartheta_3(v;\tau)$$

$$\vartheta_3\left(v+\frac{\tau}{2};\tau\right)=\alpha\vartheta_2(v;\tau),\quad \vartheta_4\left(v+\frac{\tau}{2};\tau\right)=i\alpha\vartheta_1(v;\tau)\qquad \text{但し }\alpha=q^{-\frac{1}{4}}e^{-v\pi i}$$

を用いることで

$$\sqrt{e_1-e_2}=\frac{1}{\omega_1}\frac{\vartheta_1{}'(0;\tau)}{\vartheta_3(0;\tau)}\frac{\vartheta_4(0;\tau)}{\vartheta_2(0;\tau)}$$

$$\sqrt{e_1-e_3}=\frac{1}{\omega_1}\frac{\vartheta_1{}'(0;\tau)}{\vartheta_4(0;\tau)}\frac{\vartheta_3(0;\tau)}{\vartheta_2(0;\tau)}$$

$$\sqrt{e_2-e_3}=\frac{1}{\omega_1}\frac{\vartheta_1{}'(0;\tau)}{\vartheta_4(0;\tau)}\frac{\vartheta_2(0;\tau)}{\vartheta_3(0;\tau)}$$

を得る。続いて

$$\sqrt{\wp(\omega_1 v;\omega_1,\omega_2)-e_k}=\frac{1}{\omega_1}\frac{\vartheta_1{}'(0;\tau)}{\vartheta_{k+1}(0;\tau)}\frac{\vartheta_{k+1}(v;\tau)}{\vartheta_1(v;\tau)}$$

の$v=0$でのローラン展開を考える。

展開後に両辺を 2 乗して定数項を比較すると、関数$\wp(\omega_1 v)$の v=0 でのローラン展開に定数項は無いので、左辺の定数項は$-e_k$となる。よって

$$e_k = \frac{1}{{\omega_1}^2}\left(\frac{1}{3}\frac{{\vartheta_1}'''(0;\tau)}{{\vartheta_1}'(0;\tau)} - \frac{{\vartheta_{k+1}}''(0;\tau)}{\vartheta_{k+1}(0;\tau)}\right) \quad (k = 1,2,3)$$

一方で$4x^3 - g_2x - g_3 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$の係数比較により$e_1 + e_2 + e_3 = 0$だから
上式で$k = 1,2,3$　として辺々足すと

$$\frac{{\vartheta_1}'''(0;\tau)}{{\vartheta_1}'(0;\tau)} = \frac{{\vartheta_2}''(0;\tau)}{\vartheta_2(0;\tau)} + \frac{{\vartheta_3}''(0;\tau)}{\vartheta_3(0;\tau)} + \frac{{\vartheta_4}''(0;\tau)}{\vartheta_4(0;\tau)} \qquad (※)$$

となる。さて、テータ関数は偏微分方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2}\vartheta(v;\tau) = 4\pi i\frac{\partial}{\partial\tau}\vartheta(v;\tau)$$

および両辺をさらにvで偏微分した

$$\frac{\partial^3}{\partial v^3}\vartheta(v;\tau) = 4\pi i\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial\tau}\vartheta(v;\tau)$$

を満たすから、v=0 として

$${\vartheta_2}''(0;\tau) = 4\pi i\frac{\partial}{\partial\tau}\vartheta_2(0;\tau) \quad {\vartheta_3}''(0;\tau) = 4\pi i\frac{\partial}{\partial\tau}\vartheta_3(0;\tau) \quad {\vartheta_4}''(0;\tau) = 4\pi i\frac{\partial}{\partial\tau}\vartheta_4(0;\tau)$$

$$\vartheta_1'''(0;\tau) = 4\pi i\frac{\partial}{\partial\tau}{\vartheta_1}'(0;\tau)$$

を得る。これらを(※)式に代入することで

$$\frac{1}{{\vartheta_1}'(0;\tau)}\frac{\partial}{\partial\tau}{\vartheta_1}'(0;\tau) = \frac{1}{\vartheta_2(0;\tau)}\frac{\partial}{\partial\tau}\vartheta_2(0;\tau) + \frac{1}{\vartheta_3(0;\tau)}\frac{\partial}{\partial\tau}\vartheta_3(0;\tau) + \frac{1}{\vartheta_4(0;\tau)}\frac{\partial}{\partial\tau}\vartheta_4(0;\tau)$$

この両辺をτで積分すると

$${\vartheta_1}'(0;\tau) = C\vartheta_2(0;\tau)\vartheta_3(0;\tau)\vartheta_4(0;\tau)$$

となる。ここで C はτに無関係な定数である。この定数を決定するためには、テータ関数の定義式の最初の項のみを考えるとよい。すなわち上式は具体的に書くと

$$2\pi\left(q^{\frac{1}{4}} - \cdots\right) = C\left(2q^{\frac{1}{4}} + \cdots\right)(1 + \cdots)(1 + \cdots) \qquad \therefore C = \pi$$

従って

$${\vartheta_1}'(0;\tau) = \pi\vartheta_2(0;\tau)\vartheta_3(0;\tau)\vartheta_4(0;\tau)$$

これを用いることで

$$\sqrt{e_1 - e_2} = \frac{\pi}{\omega_1}\{\vartheta_4(0;\tau)\}^2 = \frac{\pi}{\omega_1}{q_0}^2{q_3}^4$$

$$\sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\pi}{\omega_1}\{\vartheta_3(0;\tau)\}^2 = \frac{\pi}{\omega_1}{q_0}^2{q_2}^4$$

$$\sqrt{e_2 - e_3} = \frac{\pi}{\omega_1}\{\vartheta_2(0;\tau)\}^2 = 4q^{\frac{1}{2}}\frac{\pi}{\omega_1}{q_0}^2{q_1}^4$$

となる。

2.具体的計算

三次方程式$4x^3-g_2x-g_3=4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)=0$の判別式を

$$\Delta = {g_2}^3-27{g_3}^2=16(e_1-e_2)^2(e_1-e_3)^2(e_2-e_3)^2$$

で定義すれば、前節の最後の式から

$$\Delta^{\frac{1}{4}}(\tau)=\frac{2\pi^3}{{\omega_1}^3}\{\vartheta_2(0;\tau)\vartheta_3(0;\tau)\vartheta_4(0;\tau)\}^2=\frac{2\pi}{{\omega_1}^3}\{\vartheta_1'(0;\tau)\}^2=\frac{8\pi^3}{{\omega_1}^3}q^{\frac{1}{2}}{q_0}^6$$

となる。これを用いると

$$p\big(u;\omega_{(4)},\omega_{(4)}i\big)\Leftrightarrow\omega_1=\omega_{(4)},\tau=i,e_1=1,e_2=0,e_3=-1$$

から

$$q_0(i)=e^{\frac{\pi}{12}}2^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\omega_{(4)}}{\pi}}$$

がわかる。すると

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(e^{2\pi n}-1)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\log(1-(e^{-\pi})^{2n})=-\log q_0(i)$$

と変形できることから、求める結果

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(e^{2\pi n}-1)}=-\log q_0(i)=-\frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}\log 2-\frac{1}{2}\log\left(\frac{\omega_{(4)}}{\pi}\right)$$

を得る。いま$q_0(i)$がわかっているのだから

$$\sqrt{e_1-e_2}=\frac{\pi}{\omega_1}{q_0}^2{q_3}^4\quad\sqrt{e_1-e_3}=\frac{\pi}{\omega_1}{q_0}^2{q_2}^4\quad\sqrt{e_2-e_3}=4q^{\frac{1}{2}}\frac{\pi}{\omega_1}{q_0}^2{q_1}^4$$

から$q_1(i),q_2(i),q_3(i)$を求めることもできて、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(e^{2\pi n}-1)}=\log q_1(i)=\frac{\pi}{12}-\frac{3}{8}\log 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\sinh(\pi n)}=2\log q_2(i)=-\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}\log 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sinh(\pi n)}=-2\log q_3(i)=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{4}\log 2$$

などがわかる。これらの結果を組み合わせることで、例えば

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\big(e^{2\pi n}+1\big)}=\log\{q_0(i)q_1(i)^2\}=\frac{\pi}{4}-\log 2+\frac{1}{2}\log\left(\frac{\omega_{(4)}}{\pi}\right)$$

などを得ることができる。

同様にして

$$\wp\left(u;\omega_{(6)},\omega_{(6)}\rho\right)\Leftrightarrow\omega_1=\omega_{(6)},\tau=\rho,e_1=1,e_2=\rho^2,e_3=\rho$$

からは

$$q_0(\rho)=e^{\frac{\sqrt{3}}{24}\pi}\,2^{-\frac{1}{3}}\,3^{\frac{1}{8}}\sqrt{\frac{\omega_{(6)}}{\pi}}$$

がわかるので、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left((-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{24}\pi+\frac{1}{3}\log 2-\frac{1}{8}\log 3-\frac{1}{2}\log\left(\frac{\omega_{(6)}}{\pi}\right)$$

を得る。他にも

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(e^{\sqrt{3}\pi n}-(-1)^n\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{24}\pi+\frac{1}{3}\log 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\sinh\left(\sqrt{3}\pi n\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{12}\pi+\frac{2}{3}\log 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\cosh\left(\sqrt{3}\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)}=\frac{\pi}{24}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left((-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}+1\right)}=\frac{\sqrt{3}}{8}\pi-\log 2+\frac{1}{8}\log 3+\frac{1}{2}\log\left(\frac{\omega_{(6)}}{\pi}\right)$$

などがわかる。

3.参考文献

[1]A.フルヴィッツ,R.クーラント:『楕円関数論』、足立恒雄・小松啓一訳、シュプリンガー・ジャパン、2007

[2]戸田盛和:『楕円関数入門』、日本評論社、2001