ラマヌジャンの和について(その 2)

T.N.

1. 周期$\omega_{(6)}, \omega_{(6)}\rho$ をもつp関数

(その 1)では例えば

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{e^{2\pi n}-1}=\frac{1}{504}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^{2\pi n}-1}=-\frac{1}{240}+\frac{1}{80}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^4\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{2\pi n}-1}=\frac{1}{24}-\frac{1}{8\pi}$$

などを求めたが、ここでは

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^7}{(-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1}=-\frac{1}{480}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{(-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1}=\frac{1}{504}-\frac{3}{112}\left(\frac{\omega_{(6)}}{\pi}\right)^6$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1}=-\frac{1}{240}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1}=\frac{1}{24}-\frac{\sqrt{3}}{12\pi}$$

などを求める。まず定数$\omega_{(6)}$を次のように定める。

$$\omega_{(6)}=2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^6}}=2.42865064788758\ldots(\mathrm{A113477})$$

これはレムニスケート周率と似たようなものであって、ある種の曲線の周長の半分を表すと考えられる。この表記方法に従えば、レムニスケート周率は次のように書くのが自然だろう。

$$\omega=\omega_{(4)}=2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

さて、周期$\omega_{(6)}, \omega_{(6)}\rho$ をもつワイエルシュトラスのp関数は

$$p(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}\omega_{(6)}+\mathbb{Z}\omega_{(6)}\rho\\ \lambda\neq 0}}\left(\frac{1}{(z-\lambda)^2}-\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

で定義される。但し$\rho^2+\rho+1=0$である。p(z)は二重周期関数で、複素平面において格子$\mathbb{Z}\omega_{(6)}+\mathbb{Z}\omega_{(6)}\rho$上の点でのみ 2 位の極をもち、それ以外で正則な複素関数である。

変数変換$x=\frac{1}{\sqrt{z}}$により

$$\omega_{(6)}=2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^6}}=2\int_1^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{4z^3-4}}$$

となるから慣用の記号で$g_2=0, g_3=4$が導かれる。これより$p(z;\omega_{(6)},\omega_{(6)}\rho)$の満たす微分方程式

$$(p'(z))^2=4p(z)^3-4$$

と、さらにこれをもう一度微分した

$$p''(z)=6p(z)^2$$

を得る。続いて p(z)の原点におけるローラン展開を

$$p(z;\omega_{(6)},\omega_{(6)}\rho)=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n M_n}{n}\frac{z^{n-2}}{(n-2)!}$$

と書く。この展開係数で数M_nを定義する。p(z)の定義より

$$p(-z) = p(z), p(z\rho) = \rho * p(z)$$

が成り立つから、M_nは n が6の倍数のとき以外は 0 である。従って

$$p(z;\omega_{(6)},\omega_{(6)}\rho) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{6n}M_{6n}}{6n} \frac{z^{6n-2}}{(6n-2)!}$$

と書き換えておく。微分方程式

$$p''(z) = 6p(z)^2$$

にこの表式を代入し、展開係数を比較することでM_nに関する漸化式

$$M_6 = \frac{9}{28}, \quad (n-1)(6n-1)(6n+1)M_{6n} = \sum_{i=1}^{n-1}(6i-1)(6n-6i-1)\binom{6n}{6i} M_{6i}M_{6(n-i)} \quad (n \geq 2)$$

を得る。いくつかの値を計算してみたので表にしておく。

n	6	12	18	24	30	36
M_n	$\frac{9}{28}$	$\frac{6075}{364}$	$\frac{9021375}{532}$	$\frac{45548922375}{364}$	$\frac{3535735099359375}{868}$	$\frac{111306761831409295078125}{255892}$

p(z)の定義式の右辺を

$$\frac{1}{(z-\lambda)^2} = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{2z}{\lambda^3} + \frac{3z^2}{\lambda^4} + \dots$$

を用いて展開したものと、M_nの定義式を比較することで

$$\sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\rho \\ \lambda \neq 0}} \frac{1}{\lambda^{6n}} = \frac{\left(2\omega_{(6)}\right)^{6n}}{(6n)!} M_{6n} \quad (n \geq 1)$$

が成り立つことがわかる。要するにこれは 0 を除くアイゼンシュタイン整数の逆6n乗和である。

2. 具体的計算

$\rho = \exp\left(\frac{2}{3}\pi i\right)$とする。アイゼンシュタイン級数のモジュラー性から、$k \geq 1$のとき

$$G_{6k+2}(\rho) = \frac{1}{\rho^{6k+2}} G_{6k+2}\left(-\frac{1}{\rho}\right) = \rho G_{6k+2}(-\rho^2) = \rho G_{6k+2}(1+\rho) = \rho G_{6k+2}(\rho) \quad \therefore G_{6k+2}(\rho) = 0$$

が成り立つ。これより $E_{6k+2}(\rho) = 0$ がわかる。よって

$$0 = 1 - \frac{12k+4}{B_{6k+2}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{6k+1}(n)\exp(2\pi i\rho n)$$

ここで

$$\exp(2\pi i\rho n) = \exp\left(2\pi n\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)\right) = (-1)^n \exp(-\sqrt{3}\pi n)$$

に注意すると、最終的に

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{6k+1}}{(-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1}=\frac{B_{6k+2}}{12k+4}\quad (k\geq 1)$$

を得る。同様にして $E_{6k-2}(\rho)=0$ もわかるので

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{6k-3}}{(-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1}=\frac{B_{6k-2}}{12k-4}\quad (k\geq 1)$$

を得る。具体的にいくつか値をあげると

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{7}}{(-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1}=\frac{-1}{480}\ ,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{13}}{(-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1}=\frac{1}{24}\ ,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{19}}{(-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1}=\frac{-174611}{13200}\ ,\dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{3}}{(-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1}=\frac{-1}{240}\ ,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{9}}{(-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1}=\frac{1}{264}\ ,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{15}}{(-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1}=\frac{-3617}{16320}\ ,\dots$$

などとなる。またアイゼンシュタイン整数の逆6k 乗和

$$\sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\rho\\ \lambda\neq 0}}\frac{1}{\lambda^{6k}}=\frac{\left(2\omega_{(6)}\right)^{6k}}{(6k)!}M_{6k}\quad (k\geq 1)$$

は少し書き換えることで

$$G_{6k}(\rho)=\sum_{\substack{s,t\in\mathbb{Z}\\ (s,t)\neq(0,0)}}\frac{1}{(s+t\rho)^{6k}}$$

に等しいことがわかる。よって

$$\frac{\left(2\omega_{(6)}\right)^{6k}}{(6k)!}M_{6k}=G_{6k}(\rho)=2\,\zeta\,(6k)\left(1-\frac{12k}{B_{6k}}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{6k-1}(n)\exp(2\pi i\rho n)\right)$$

となって、前問と同様にして約数関数を含まない形に書き換えてから少し整理すると

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{6k-1}}{(-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1}=\frac{1}{12k}\left(B_{6k}+(-1)^k\left(\frac{\omega_{(6)}}{\pi}\right)^{6k}M_{6k}\right)\quad (k\geq 1)$$

を得る。具体的にいくつか値をあげると

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{5}}{(-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1}=\frac{1}{504}-\frac{3}{112}\left(\frac{\omega_{(6)}}{\pi}\right)^{6}\ ,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{11}}{(-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1}=\frac{-691}{65520}+\frac{2025}{2912}\left(\frac{\omega_{(6)}}{\pi}\right)^{12}\ ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{17}}{(-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1}=\frac{43867}{28728}-\frac{1002375}{2128}\left(\frac{\omega_{(6)}}{\pi}\right)^{18}\ ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{23}}{(-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1}=\frac{-236364091}{131040}+\frac{15182974125}{5824}\left(\frac{\omega_{(6)}}{\pi}\right)^{24}\ ,\dots$$

などとなる。ここで例外的な扱いになるのは

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1}=\frac{1}{24}-\frac{\sqrt{3}}{12\pi}$$

である。これについては

$$E_2(\tau)=\frac{1}{\tau^2}E_2\left(-\frac{1}{\tau}\right)+\frac{6i}{\pi\tau}$$

において$\tau=\rho$とすることで

$$E_2(\rho)=\frac{1}{\rho^2}E_2\left(-\frac{1}{\rho}\right)+\frac{6i}{\pi\rho}=\rho E_2(-\rho^2)+\frac{6}{\pi}\exp\left(\frac{-\pi i}{6}\right)=\rho E_2(1+\rho)+\frac{6}{\pi}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)$$

$$\therefore\ (1-\rho)E_2(\rho)=\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)E_2(\rho)=\frac{6}{\pi}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right),\quad \therefore\ E_2(\rho)=\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$$

したがって

$$\frac{2\sqrt{3}}{\pi}=E_2(\rho)=1-24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)\exp(2\pi i\rho n)$$

となるから、求める結果を得る。

3. 分母が$n^{-5},n^{-11},n^{-17},\ldots,n^{-3},n^{-9},n^{-15},\ldots$となる場合

(その 1)と同様の方法になるので結果だけ書くと、$k=0,1,2,\ldots$に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{12k+5}\left((-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1\right)}$$

$$=-\frac{1}{2}\zeta(12k+5)+\frac{(2\pi)^{12k+5}}{6(12k+6)!}\left\{2\sum_{m=0}^{3k+1}\binom{12k+6}{2m}(-1)^m B_{2m}B_{12k-2m+6}\cos\left(\frac{m\pi}{3}\right)\right\}$$

また、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{12k+11}\left((-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1\right)}=-\frac{1}{2}\zeta(12k+11)-\frac{(2\pi)^{12k+11}}{6(12k+12)!}*A$$

$$A=\left\{\binom{12k+12}{6k+6}{B_{6k+6}}^2+2\sum_{m=0}^{3k+2}\binom{12k+12}{2m}(-1)^m B_{2m}B_{12k-2m+12}\cos\left(\frac{m\pi}{3}\right)\right\}$$

が成り立つ。具体的にいくつか値をあげると

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5\left((-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1\right)}=-\frac{1}{2}\zeta(5)+\frac{11\sqrt{3}\pi^5}{11340}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{11}\left((-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1\right)}=-\frac{1}{2}\zeta(11)+\frac{7457\sqrt{3}\pi^{11}}{7662154500}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{17}\left((-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1\right)}=-\frac{1}{2}\zeta(17)+\frac{2366389\sqrt{3}\pi^{17}}{2338757728807500}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{23}\left((-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1\right)}=-\frac{1}{2}\zeta(23)+\frac{12750524197\sqrt{3}\pi^{23}}{1211517431782539131250 0}$$

などとなる。

同じく$k=0,1,2,\ldots$に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{12k+3}\left((-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1\right)}=-\frac{1}{2}\zeta(12k+3)+\frac{(2\pi)^{12k+3}}{6(12k+4)!}*A$$

$$A=\left\{\binom{12k+4}{6k+2}B_{6k+2}{}^2-2\sum_{m=0}^{3k}\binom{12k+4}{2m}(-1)^m B_{2m}B_{12k-2m+4}\cos\left(\frac{m-1}{3}\pi\right)\right\}$$

また、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{12k+9}\left((-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1\right)}$$

$$=-\frac{1}{2}\zeta(12k+9)+\frac{(2\pi)^{12k+9}}{6(12k+10)!}\left\{2\sum_{m=0}^{3k+2}\binom{12k+10}{2m}(-1)^m B_{2m}B_{12k-2m+10}\cos\left(\frac{m-1}{3}\pi\right)\right\}$$

が成り立つ。具体的にいくつか値をあげると

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3}\left((-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1\right)}=-\frac{1}{2}\zeta(3)+\frac{\sqrt{3}\pi^3}{90}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{9}\left((-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1\right)}=-\frac{1}{2}\zeta(9)+\frac{\sqrt{3}\pi^9}{103950}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{15}\left((-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1\right)}=-\frac{1}{2}\zeta(15)+\frac{542\sqrt{3}\pi^{15}}{54273594375}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{21}\left((-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1\right)}=-\frac{1}{2}\zeta(23)+\frac{365843\sqrt{3}\pi^{21}}{3522057770168437 5}$$

などとなる。上では n の指数によってわざわざ4つのタイプ

$$n^{12k+3}, n^{12k+5}, n^{12k+9}, n^{12k+11}$$

に分けており、かつ総和の項数も対称性から削減している。このようにしたのは実際に計算を行うことを目的としたこちらの都合による。よって、もっと簡単な表示があるかもしれない。

例によって

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left((-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1\right)},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{7}\left((-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1\right)},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{13}\left((-1)^n e^{\sqrt{3}\pi n}-1\right)}$$

などを求める方法は分からなかった。

4. 散発的な話題

(その1)の内容を用いることで得られる、いくつかの結果を書いておく。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{2\pi n}-1}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sinh^2(\pi n)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^{2\pi n}-1}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sinh^2(\pi n)}+\frac{3}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sinh^4(\pi n)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{e^{2\pi n}-1}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sinh^2(\pi n)}+\frac{15}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sinh^4(\pi n)}+\frac{15}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sinh^6(\pi n)}$$

…などが成立することから、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sinh^2(\pi n)}=\frac{1}{6}-\frac{1}{2\pi}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sinh^4(\pi n)}=-\frac{1}{90}+\frac{1}{3\pi}+\frac{1}{30}\left(\frac{\omega_{(4)}}{\pi}\right)^4$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sinh^6(\pi n)}=\frac{191}{1890}-\frac{4}{15\pi}-\frac{1}{30}\left(\frac{\omega_{(4)}}{\pi}\right)^4$$

…などを得る。ここで$\omega_{(4)}$は冒頭であげたようにレムニスケート周率である。

また、アイゼンシュタイン級数を用いたペー関数のローラン展開

$$p(z;1,\tau)=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)G_{2n+2}(\tau)\,z^{2n}$$

と、p(z)の満たす微分方程式

$$(p'(z))^2=4p(z)^3-g_2p(z)-g_3=4p(z)^3-60G_4p(z)-140G_6$$

およびこれをもう一度微分した

$$p''(z)=6p(z)^2-30G_4$$

から次の漸化式が導かれる。

$$(n-3)(2n-1)(2n+1)G_{2n}=3\sum_{i=2}^{n-2}(2i-1)(2n-2i-1)G_{2i}G_{2(n-i)}\quad(n\geq 4)$$

さらに

$$G_{2k}(\tau)=2\,\zeta\,(2k)E_{2k}(\tau)$$

を用いることで

$$E_8=E_4{}^2\ ,\quad E_{10}=E_4E_6\ ,\quad 691E_{12}=441E_4E_8+250E_6{}^2\ ,\quad E_{14}=E_4E_{10}=E_6E_8$$

などを得る。

これと

$$E_{2k}(q) = 1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n)\, q^{2n} \quad (k \geq 2) \quad q = \exp(\pi i \tau)$$

を用いて係数比較を行うことで、自然数 n の約数の累乗和の間に成り立つ関係式

$$\sigma_3(n) - \sigma_7(n) + 120 \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_3(k)\, \sigma_3(n-k) = 0$$

$$10\sigma_3(n) - 21\sigma_5(n) + 11\sigma_9(n) - 5040 \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_3(k)\sigma_5(n-k) = 0$$

$$21\sigma_3(n) - 50\sigma_5(n) + 42\sigma_7(n) - 13\sigma_{11}(n) + 2520 \sum_{k=1}^{n-1} \{4\sigma_3(k)\sigma_7(n-k) + 5\sigma_5(k)\sigma_5(n-k)\} = 0$$

$$10\sigma_3(n) - 11\sigma_9(n) + \sigma_{13}(n) - 2640 \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_3(k)\, \sigma_9(n-k) = 0$$

$$21\sigma_5(n) - 20\sigma_7(n) - \sigma_{13}(n) + 10080 \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_5(k)\, \sigma_7(n-k) = 0$$

などがわかる。