# ラマヌジャンの和について(その１)

T.N.

## 1. 序

2008.7.28 のコラム「ラマヌジャンの和」において

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{e^{2\pi n}-1}=\frac{1}{504}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^{2\pi n}-1}=-\frac{1}{240}+\frac{1}{80}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^4\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{2\pi n}-1}=\frac{1}{24}-\frac{1}{8\pi}$$

等をアイゼンシュタイン級数の保型性から求めているが、このタイプの無限級数の値についてもう少し一般的に求めることを考えたい。そのために、まずワイエルシュトラスの楕円関数についての概説から始める。続いてアイゼンシュタイン級数についていくつかの事実を述べた後、それらを用いて上記のようなタイプの無限級数の値を具体的に求める。

注意として、以下の内容において(A000000)という記号は The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences におけるindexである。ここにある以上の値が知りたければ適宜検索されたい。

如何せん勉強不足であるから怪しげな議論になることもあろうが、しばらくお付き合い願いたいと思う。

## 2.ワイエルシュトラスのp(ペー)関数

まずレムニスケート周率ωを

$$\omega=2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=2.62205755429211\ldots(\mathrm{A062539})$$

と定義する。これはレムニスケート r^2=cos2θ の周長の半分である。
すると周期ω、$\omega\sqrt{-1}$をもつワイエルシュトラスのp関数は

$$p(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}\omega+\mathbb{Z}\omega\sqrt{-1}\\ \lambda\neq 0}}\left(\frac{1}{(z-\lambda)^2}-\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

で定義される。p(z)は二重周期関数で、複素平面において格子$\mathbb{Z}\omega+\mathbb{Z}\omega\sqrt{-1}$上の点でのみ 2 位の極をもち、それ以外で正則な複素関数である。
以降、特に周期ω、$\omega\sqrt{-1}$をもつことを強調したいときは　$p(z;\omega,\omega\sqrt{-1})$　と書くことにする。

さて、レムニスケート周率を定義する積分は変数変換$x=\frac{1}{\sqrt{z}}$により

$$\omega=2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=2\int_1^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{4z^3-4z}}$$

となるから慣用の記号で$g_2=4, g_3=0$が導かれ、これより$p(z;\omega,\omega\sqrt{-1})$の満たす微分方程式

$$(p'(z))^2=4p(z)^3-4p(z)$$

と、さらにこれをもう一度微分した

$$p''(z)=6p(z)^2-2$$

を得る。続いて p(z)の原点におけるローラン展開を

$$\wp(z;\omega,\omega\sqrt{-1})=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^nH_n}{n}\frac{z^{n-2}}{(n-2)!}$$

と書く。この展開係数でフルヴィッツ数$H_n$を定義する。℘関数の定義より

$$\wp(-z)=\wp(z),\wp(z\sqrt{-1})=-\wp(z)$$

が成り立つから、$H_n$は n が 4 の倍数のとき以外は 0 である。従って

$$\wp(z;\omega,\omega\sqrt{-1})=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{4n}H_{4n}}{4n}\frac{z^{4n-2}}{(4n-2)!}$$

と書き換えておく。微分方程式

$$\wp''(z)=6\wp(z)^2-2$$

にこの表式を代入し、展開係数を比較することでフルヴィッツ数に関する漸化式

$$H_4=\frac{1}{10},\quad (2n-3)(4n-1)(4n+1)H_{4n}=3\sum_{i=1}^{n-1}(4i-1)(4n-4i-1)\binom{4n}{4i}H_{4i}H_{4(n-i)}\quad(n\geq 2)$$

を得る。いくつかの値を表にしておく。

| n | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $H_n$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{567}{130}$ | $\frac{43659}{170}$ | $\frac{392931}{10}$ | $\frac{1724574159}{130}$ | $\frac{2498907956391}{290}$ | $\frac{1671769422825579}{170}$ |

※以上の値は(A002306)/(A047817)

℘(z)の定義式の右辺を

$$\frac{1}{(z-\lambda)^2}=\frac{1}{\lambda^2}+\frac{2z}{\lambda^3}+\frac{3z^2}{\lambda^4}+\dots$$

を用いて展開したものと、$H_n$の定義式を比較することで

$$\sum_{\substack{\lambda\in\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\sqrt{-1}\\ \lambda\neq 0}}\frac{1}{\lambda^{4n}}=\frac{(2\omega)^{4n}}{(4n)!}H_{4n}\quad(n\geq 1)$$

が成り立つことがわかる。要するにこれは 0 を除くガウス整数の逆4n乗和である。
偶数ゼータ$\zeta(2n)$のベルヌーイ数を用いた表式を少し書き換えて

$$\sum_{\substack{\lambda\in\mathbf{Z}\\ \lambda\neq 0}}\frac{1}{\lambda^{2n}}=\frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!}(-1)^{n-1}B_{2n}\quad(n\geq 1)$$

とすると、これが 0 を除く整数の逆2n乗和であることと対比して、フルヴィッツ数とベルヌーイ数の類似性、或いはレムニスケート周率と円周率の類似性が見えてくる。
本稿では用いないが偶数番目のベルヌーイ数を表す漸化式で

$$B_2=\frac{1}{6},\quad (2n+1)B_{2n}=-\sum_{i=1}^{n-1}\binom{2n}{2i}B_{2i}B_{2(n-i)}\quad(n\geq 2)$$

があることにも言及しておく。フルヴィッツ数の満たす漸化式と似たような雰囲気を持っていることに注目したい。これは$f(t)=\frac{t}{2}\coth\frac{t}{2}$が満たす微分方程式

$$f(t) - t * f'(t) = f(t)^2 - \frac{t^2}{4}$$

と f(t)のテイラー展開から得られる。

## 3. アイゼンシュタイン級数

3 以上の整数 k に対して k 位のアイゼンシュタイン級数を

$$G_k(\tau) = \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z} \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(m+n\tau)^k} \quad , \quad \mathrm{Im}(\tau) > 0$$

と定義すると、次のことが成り立つ。

(ⅰ)$k \geq 3$のとき、上半平面の任意の点$\tau$に対して級数$G_k(\tau)$は収束し、上半平面上の正則関数になる。

(ⅱ)k が奇数のとき$G_k(\tau) = 0 \quad (\mathrm{Im}(\tau) > 0)$

(ⅲ)モジュラー性

$$G_k(\tau+1) = G_k(\tau) \quad , \quad G_k(\tau) = \frac{1}{\tau^k} G_k\left(-\frac{1}{\tau}\right)$$

さて、アイゼンシュタイン級数は次のようなフーリエ展開をもつ。

$$G_{2k}(\tau) = 2\,\zeta\,(2k) + \frac{2(-1)^k(2\pi)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n)\exp(2\pi i\tau n) \quad (k \geq 2)$$

但し$\sigma_{2k-1}(n)$は約数関数で、n の約数の 2k−1 乗の和を表す。証明をここでは述べないが

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{r=1}^{\infty} r^{k-1}\exp(2\pi i\tau n r)$$

を示すことが出発点である。コタンジェントの部分分数展開を微分し、オイラーの公式などを用いて指数関数を含む形に書き直してから次々に微分していけばよい。その他、約数関数に関してもちょっとした操作が必要になるが割愛させていただく。

ところで上記のフーリエ展開は、偶数ゼータを括り出すことで

$$G_{2k}(\tau) = 2\,\zeta\,(2k)\left(1 - \frac{4k}{B_{2k}}\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n)\exp(2\pi i\tau n)\right) \quad (k \geq 2)$$

という表し方もできる。このカッコ内を$E_{2k}(\tau)$と表し、正規化されたアイゼンシュタイン級数と呼ぶらしい。

$$E_{2k}(q) = 1 - \frac{4k}{B_{2k}}\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n)\, q^{2n} \quad (k \geq 2) \quad q = \exp(\pi i\tau)$$

またアイゼンシュタイン級数を用いて、ペー関数は次のようにローラン展開される。

$$p(z;1,\tau) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)G_{2n+2}(\tau)\, z^{2n}$$

証明はペー関数とアイゼンシュタイン級数の定義に戻ってなされる。

# 4. 具体的計算

アイゼンシュタイン級数のモジュラー性から、$k \geq 1$のとき

$$G_{4k+2}(i) = \frac{1}{i^{4k+2}} G_{4k+2}\left(-\frac{1}{i}\right) = -G_{4k+2}(i) \quad \therefore G_{4k+2}(i) = 0$$

が成り立つ。これより $E_{4k+2}(i) = 0$ がわかる。一方で約数関数の母関数は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_k(n)\, x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k x^n}{1 - x^n}$$

と書けることが知られている。これらを用いると

$$0 = 1 - \frac{8k+4}{B_{4k+2}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{4k+1}(n) \exp(-2\pi n) = 1 - \frac{8k+4}{B_{4k+2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4k+1} \exp(-2\pi n)}{1 - \exp(-2\pi n)}$$

しかるに

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4k+1}}{e^{2\pi n} - 1} = \frac{B_{4k+2}}{8k+4} \quad (k \geq 1)$$

を得る。具体的にいくつか値をあげると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{e^{2\pi n} - 1} = \frac{1}{504}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^9}{e^{2\pi n} - 1} = \frac{1}{264}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{13}}{e^{2\pi n} - 1} = \frac{1}{24}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{17}}{e^{2\pi n} - 1} = \frac{43867}{28728}, \cdots$$

などとなる。またガウス整数の逆4k 乗和

$$\sum_{\substack{\lambda \in \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\sqrt{-1} \\ \lambda \neq 0}} \frac{1}{\lambda^{4k}} = \frac{(2\omega)^{4k}}{(4k)!} H_{4k} \quad (k \geq 1)$$

は少し書き換えるだけで

$$G_{4k}\left(\sqrt{-1}\right) = \sum_{\substack{s,t \in \mathbb{Z} \\ (s,t) \neq (0,0)}} \frac{1}{\left(s + t\sqrt{-1}\right)^{4k}}$$

に等しいことがわかる。よって

$$\frac{(2\omega)^{4k}}{(4k)!} H_{4k} = G_{4k}\left(\sqrt{-1}\right) = 2\,\zeta\,(4k) \left(1 - \frac{8k}{B_{4k}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{4k-1}(n) \exp(-2\pi n)\right)$$

となって、前問と同様にして約数関数を含まない形に書き換えてから少し整理すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4k-1}}{e^{2\pi n} - 1} = \frac{1}{8k}\left(B_{4k} + \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{4k} H_{4k}\right) \quad (k \geq 1)$$

を得る。

具体的にいくつか値をあげると

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^{2\pi n}-1}=-\frac{1}{240}+\frac{1}{80}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^4 ,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^7}{e^{2\pi n}-1}=-\frac{1}{480}+\frac{3}{160}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^8 ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{11}}{e^{2\pi n}-1}=-\frac{691}{65520}+\frac{89}{1040}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{12} ,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{15}}{e^{2\pi n}-1}=-\frac{3617}{16320}+\frac{43659}{5440}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{16} ,\dots$$

などとなる。ここで例外的な扱いになるのは

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{2\pi n}-1}=\frac{1}{24}-\frac{1}{8\pi}$$

である。アイゼンシュタイン級数

$$G_{2k}(\tau)=2\zeta(2k)+\frac{2(-1)^k(2\pi)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(n)\exp(2\pi i\tau n)\quad (k\geq 2)$$

において k=1 は規定外になっている。というのも無限級数

$$G_k(\tau)=\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\(m,n)\neq(0,0)}}\frac{1}{(m+n\tau)^k} ,\quad \mathrm{Im}(\tau)>0$$

は k=2 のとき絶対収束せず、m,n をとる順序により値が異なってくるからである。しかし同じように

$$E_2(\tau)=1-\frac{4}{B_2}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2-1}(n)\exp(2\pi i\tau n)=1-24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)\exp(2\pi i\tau n)$$

と定義すると、実はモジュラー性こそ持たないが次のような「ずれ」を含んだ式

$$E_2(\tau)=\frac{1}{\tau^2}E_2\left(-\frac{1}{\tau}\right)+\frac{6i}{\pi\tau}$$

が成り立つ。これより $E_2(i)=\frac{3}{\pi}$ がわかる。したがって

$$\frac{3}{\pi}=E_2(i)=1-24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)\exp(-2\pi n)$$

となるから、求める結果を得る。

## 5. 分母が$n^{-3},n^{-7},n^{-11},\dots$となる場合

この場合は直接的には楕円関数とのつながりは無いのだが、奇数ゼータとのつながりが出てくる。具体的には

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\coth(\pi n)}{n^4-x^4}=\frac{1}{4\pi x^4}-\frac{\pi}{4x^2}\cot(\pi x)\coth(\pi x)\quad (x\neq\pm1,\pm2,\dots)$$

を示すことになる。しからば$|x|<1$のとき、両辺に x^4 を掛けてから級数展開することで左辺は

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\coth(\pi n)}{n^3}\right\}x^4+\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\coth(\pi n)}{n^7}\right\}x^8+\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\coth(\pi n)}{n^{11}}\right\}x^{12}+\cdots$$

となって、右辺の展開係数と比較することで次の結果を得る。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\coth(\pi n)}{n^{4k+3}}=-\frac{(2\pi)^{4k+3}}{2(4k+4)!}\sum_{m=0}^{2k+2}\binom{4k+4}{2m}(-1)^m B_{2m}B_{4n-2m+4}\quad(k\geq 0)$$

対称性から項数を減らして、さらに

$$\frac{\coth(\pi n)}{n^{4k+3}}=\frac{2}{n^{4k+3}(e^{2\pi n}-1)}+\frac{1}{n^{4k+3}}$$

であることから、$k=0,1,2,\ldots$に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4k+3}(e^{2\pi n}-1)}$$

$$=-\frac{1}{2}\zeta(4k+3)+\frac{(2\pi)^{4k+3}}{4(4k+4)!}\left\{\binom{4k+4}{2k+2}(-1)^k {B_{2k+2}}^2-2\sum_{m=0}^{k}\binom{4k+4}{2m}(-1)^m B_{2m}B_{4k-2m+4}\right\}$$

を得る。具体的にいくつか値をあげると、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3(e^{2\pi n}-1)}=-\frac{1}{2}\zeta(3)+\frac{7\pi^3}{360},\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^7(e^{2\pi n}-1)}=-\frac{1}{2}\zeta(7)+\frac{19\pi^7}{113400},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{11}(e^{2\pi n}-1)}=-\frac{1}{2}\zeta(11)+\frac{1453\pi^{11}}{851350500},\ \ldots$$

となる。余談になるが、上式に規定外の k=−1,−2,−3,…を代入してみると(総和部分を無視すれば)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{2\pi n}-1}=\frac{1}{24}-\frac{1}{8\pi},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{e^{2\pi n}-1}=\frac{1}{504},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^9}{e^{2\pi n}-1}=\frac{1}{264},\ \ldots$$

と正しい結果を得る。しかしこれをもって証明とはいえないだろう。

さて、最初にあげた式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\coth(\pi n)}{n^4-x^4}=\frac{1}{4\pi x^4}-\frac{\pi}{4x^2}\cot(\pi x)\coth(\pi x)$$

をどのように示せばよいだろうか？実は

$$f(z)=\frac{z\coth(\pi z)}{z^4-x^4}$$

とおくと

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n\coth(\pi n)}{n^4-x^4}=-(\text{すべての } f(z) \text{の極における } \pi\cot(\pi z)f(z) \text{の留数の総和})$$

が成り立つのである。f(z)は位数1の極

$$z = n\sqrt{-1} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots), \quad \pm x, \pm x\sqrt{-1}$$

をもつから、あとはこの点における$\pi\cot(\pi z)f(z)$の具体的な留数(の和)を計算すればよい。

もう少し一般的な留数定理による級数総和法　およびその証明については
スピーゲル　(石原宗一訳)、複素解析　(マグロウヒル大学演習シリーズ)　、マグロウヒル出版、1984
を参考にされたい。

# 6. 今後の課題

2008.7.28 のコラム「ラマヌジャンの和」においては

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(e^{2\pi n}-1)} = -\frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\log\left(\frac{\omega}{\pi\sqrt{2}}\right)$$

も紹介されている。しかし残念ながら求める方法がわからない。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5(e^{2\pi n}-1)} \;,\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^9(e^{2\pi n}-1)} \;,\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{13}(e^{2\pi n}-1)}$$

などについても同様である。

# 7. 参考文献

A.フルヴィッツ、R.クーラント（足立恒雄、小松啓一訳)、楕円関数論（シュプリンガー数学クラシックス)、シュプリンガージャパン、2007

荒川恒男・伊吹山知義・金子昌信、ベルヌーイ数とゼータ関数、牧野書店、2001

スピーゲル（石原宗一訳)、複素解析（マグロウヒル大学演習シリーズ）、マグロウヒル出版、1984

高橋礼司、複素解析、東京大学出版会、1990

エリアス・M. スタイン、ラミ. シャカルチ（新井仁之、杉本充、高木啓行、千原浩之訳)、
複素解析（プリンストン解析学講義)、日本評論社、2009