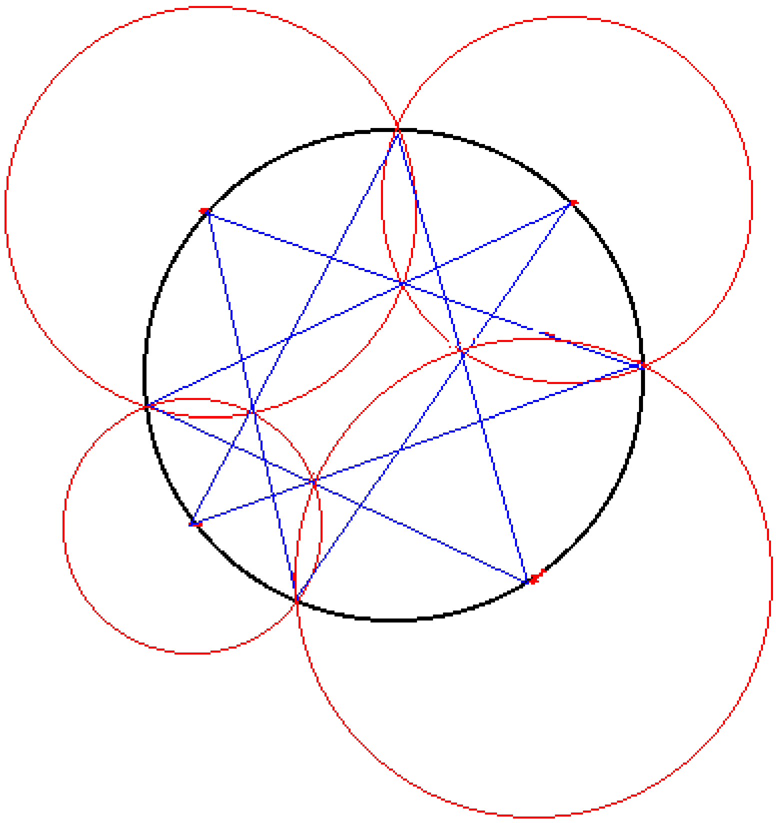
円と星形の定理（その４）

中川宏

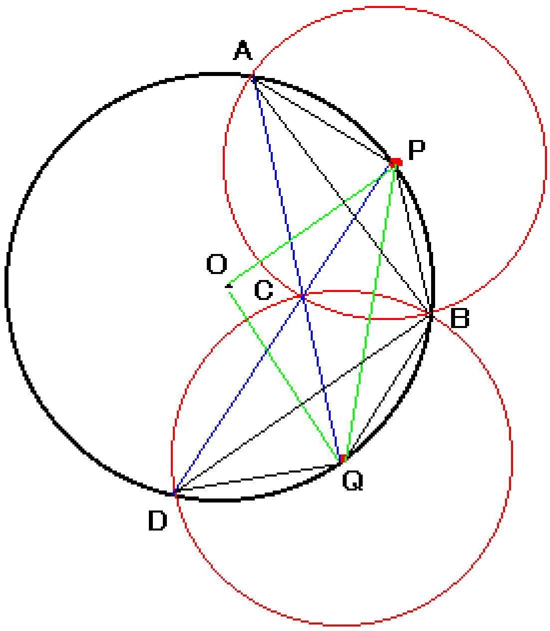


同一円周上に中心を置く円を４つ以上並べて、隣り合う円の交点も同一円周上にあるようにしたとき、円周上にある円の中心→隣り合う円の内側の交点→外側の交点→内側の交点→円周上の円の中心と結んでいくと星形が描けます。

この定理について一松先生からいただいたお手紙を紹介します。

今回もまた美しい円の模様を楽しませていただきました。
今回の諸図形の基本は末尾に挙げられた補助定理と思います。
これはそれほど難しい結果ではないようです。（とは言うものの考え付くまでに多少の時間がかかりました。）私なりの証明を述べます。

まず、次の事実に注意します。
①、四角形PBQCは凧形（PB＝PC，QB＝QC）であり、対角線PQについて対称、したがって∠PCQ＝∠PBQである。
②、△PAC、△PAB，△QBD、△QCDは二等辺三角形である（PA＝PC＝PB，QC＝QD＝QB）。
したがって∠ACQ＝∠ACP＋∠PCQ＝∠PAC＋∠PBQ＝∠BAC＋∠BAP＋∠PBQ。ここで∠BAP＝円Oの弧BP上の円周角、∠BAC＝1／2∠BPC（中心角と円周角）＝∠QPB（凧形の半分）＝円Oの弧BQ上の円周角です。
そして、∠PBQ＝180°－円Oの弧PQ上の円周角です。したがって




∠ACQ＝180°－円OのPQ上の円周角＋BP上の円周角＋BQ上の円周角
ですが、さいごの網掛けの部分はPQ＝QB＋BPであってちょうど打ち消しあい、
∠ACQ＝180°すなわちA、C，Qは一直線上にあります。■
P，C，Dも同様ですが、
∠DCQ＝∠CDQ＝∠CDB＋∠QDB＝1/2∠BQC＋∠QDB＝∠PQB＋∠QBD
＝円OのPB＋QB上の円周角＝円O上のPQ上の円周角＝∠ACP
とすればP，C，Dも一直線になります。■

円が多くて、どの円の上の円周角か注意しないと誤りやすいのですが、上記のように、対称性（二等辺三角形の性質）と円周角の関係だけで証明できます。
面白い発見と存じます。