３つの円の共通弦と三角形の５心（その３）

中川宏

一松先生からのお手紙続報を紹介します。

その後若干気付いた点をご一報します。但し三角形の重心座標を使うので、その説明は省略します。（「理系への数学」の本年１月号～７月号に連載した私の記事で若干解説しました。）

△ABCの３辺の長さを a=BC，b=CA，c=AB とおきます。重心座標によると円は

$(x+y+z)(ux+vy+wz)=a^2yz+b^2zx+c^2xy$ （u,v,w は定数で円を表す助変数）と表されます。

$(u_i,v_i,w_i)(i=1,2)$ という2円があるとき、両者の差

$(u_2-u_1)x+(v_2-v_1)y+(w_2-w_1)x=0$

で表される直線が両円の根軸です。（両円が交わるか否かを問わず）

i=1,2,3 と3円があるときには、３本の根軸は同一点（根心）で交わり、その点の重心座標は

$$\begin{vmatrix} 1 & v1 & w1 \\ 1 & v2 & w2 \\ 1 & v3 & w3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u1 & 1 & w1 \\ u2 & 1 & w2 \\ u3 & 1 & w3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u1 & v1 & 1 \\ u2 & v2 & 1 \\ u3 & v3 & 1 \end{vmatrix}$$

で表されます。実際例示頂いた諸点については（もちろん幾何学的に明らかですが）すべてこの形で表現されることを確かめました。

とすれば、逆に三角形の内部に（ξ,η,ξ）で表される（実は比のみが本質的）が与えられたとき、そこを根心とする3円は、上述の行列式の比が$\xi:\eta:\xi$になるように（u_i,v_i,w_i）をとれば、そうなります。もちろんこれは理論的にそうなる、ということだけです。実際には3円を「対称」に取り、またその中心や周上の点に直接に意味があるように選ぶ必要があります。無限に多くの可能性のある中から、「うまい」値を探すのは案外にたいへんです。

例えば重心については、その重心座標が1：1：1なので、上記の3個の行列式が全て等しくなるように（u_i,v_i,w_i）をとればよいわけです。これは $u_1=v_2=w_3=$ Ｋ，$u_2=u_3=v_1=v_3=w_1=w_3=$Цとおけば、行列式は等しくなります。Ｋ（≠Ц）とЦをうまくとって

$(x+y+z)(Кx+Цy+Цz)=a^2yz+b^2zx+c^2xy$

および左辺第2項を Цx+Кy+Цz、Цx+Цy+Кz とした3円を描けば、それらの根心は重心になります。

そこまでは理論的にわかるのですが、具体的にＫ、Цをどうとれば「自然な」形になるのかよくわかりません。Цは a,b,c について対称な2次式として $a^2+b^2+c^2$ の定数倍に採るのが自然な気がします。Ｋを0とすれば各円は順次頂点A、B，Cを通ります。またЦ＝0とすれば各円は順次B，C；C，A；A，Bを通りますが、あまり「自然」な意味づ

けができません。このあたりもう少し検討してみます。（Ｋ＝－Цとか Ｋ＝２Цとするのがよさそう？とも感じます。）
理論的には、重心も含めて「任意の」点が適当な3円の根心として表される、と言う結論で満足すべきかも知れません。しかし以上のような式を出しても、それがどのような円か、そしてその中から「奇麗な」円を同選ぶかが次の課題です。折を見て少し考えてみます。