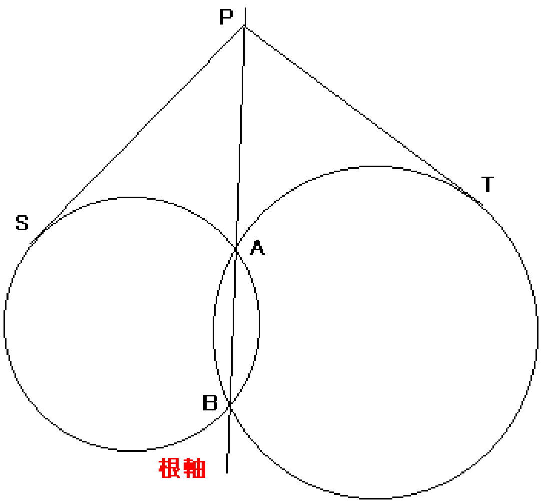
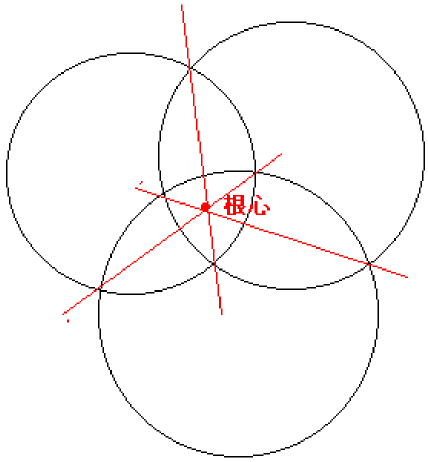
3つの円の共通弦と三角形の5心（その2）

中川宏

（その1）について一松信先生から、前提的に知っておくべき事柄と、発展的な方向についてお便りをいただきましたので、紹介させていただきます。

①、相交わる2円の交点を結ぶ直線は両円の根軸と呼ばれます。





交点をA，B、線分ABの延長上の点Pから両円に接線PS，PTを引けば、
PS^2＝PA・PB＝PT^2で、PS＝PTです。
逆にそういう点Pは根軸の延長上の点に限ります。
線分AB上の点Pについても、両円に「虚」の接線を引いたとみなして、PS＝PTが成立します。方程式でいえば、
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を $x^2+y^2-2ax-2by+(a^2-b^2-r^2)=0$ と書いて、
$x^2+y^2-ux-vy+c=0$とし、他の円を $x^2+y^2-u'x-v'y+c'=0$としたとき、両方の差をとった直線$(u-u')x+(v-v')y-(c-c')=0$ が根軸です。
話の枕が長くなりましたが、3個の円が互いに交わっているとき、2個ずつの円の共通点を結ぶ根軸3本は同一の点で交わります。この点は3円の根心とよばれています。図形的には、3個の円に「虚」の接線を引いたとき、それらの「長さ」が全て等しい唯一の点です。また方程式で円を
$x^2+y^2-u_ix-v_iy+c_i=0$ (i=1,2,3)としたとき、2個ずつの差
$(u_1-u_2)x+(v_1-v_2)y-(c_1-c_2)=0$
$(u_2-u_3)x+(v_2-v_3)y-(c_2-c_3)=0$
$(u_1-u_3)x+(v_1-v_3)y-(c_1-c_3)=0$ （これらは独立でない。はじめの2式の差が第3の式。）
の共通解を表します。

②、三角形の色々な「心」を三角形に付随した3円の根心として表そうという着想は有意義と思います。傍心は内心の「共役点」であり、内心に関する性質を少し修正すれば傍心になる場合が多いので、別段「不思議」ではないと思います。（単に今日の学校教育において忙しすぎるので傍心を軽視している？だけではないかと思います。）
垂心の等長共役点に相当する de Longchamps 点も垂心と同様の考え方で得られるという注意は興味がありました。
しかしこの表現は個々の「心」の性質に依存するようなので、「一般性」に乏しい印象です。早い話、重心に対してどうか？いろいろ考えてみましたが、「面白い」結果は得られませんでした。重心は Affine 幾何学的対象であり、かえって円とはなじみが薄い（？）のかもしれません。
もう少し他の「心」についても検討してみたいと存じます。（つづく）