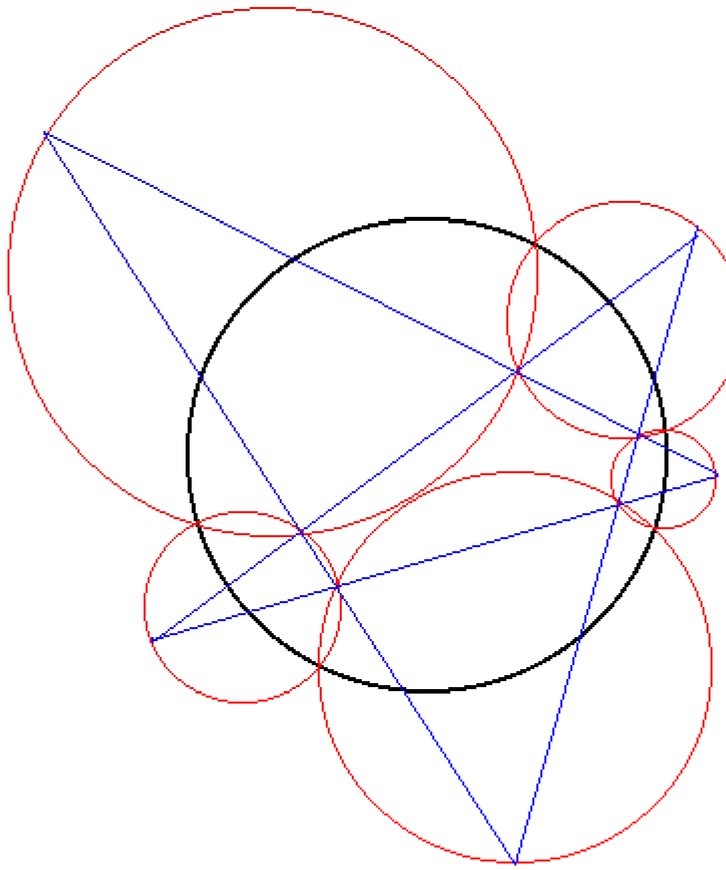
円と星形の定理

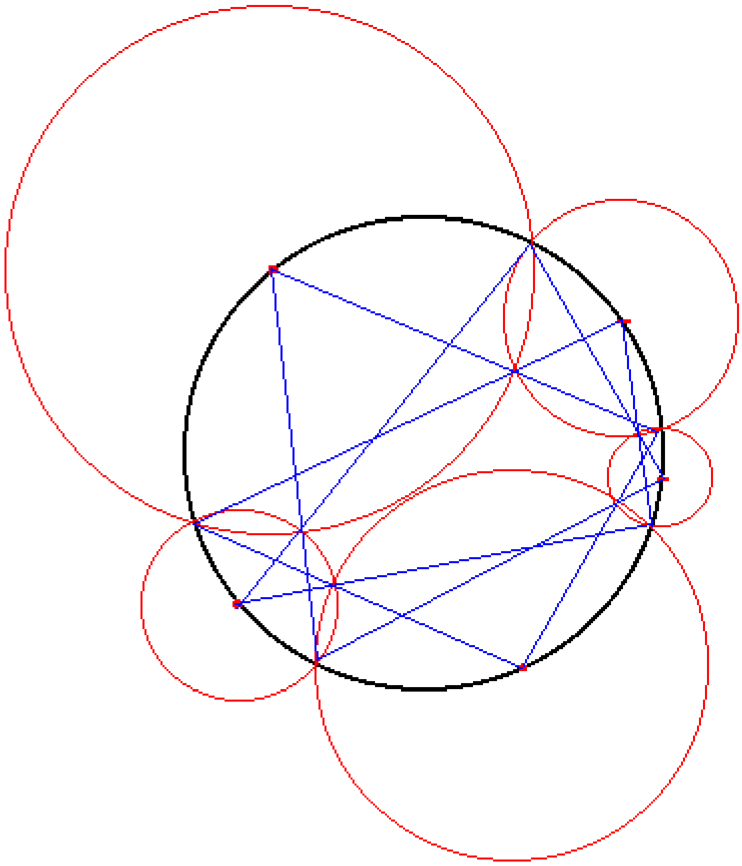
中川宏

「不思議おもしろ幾何学事典」9pに5つの円の定理という不思議な定理が載っています。

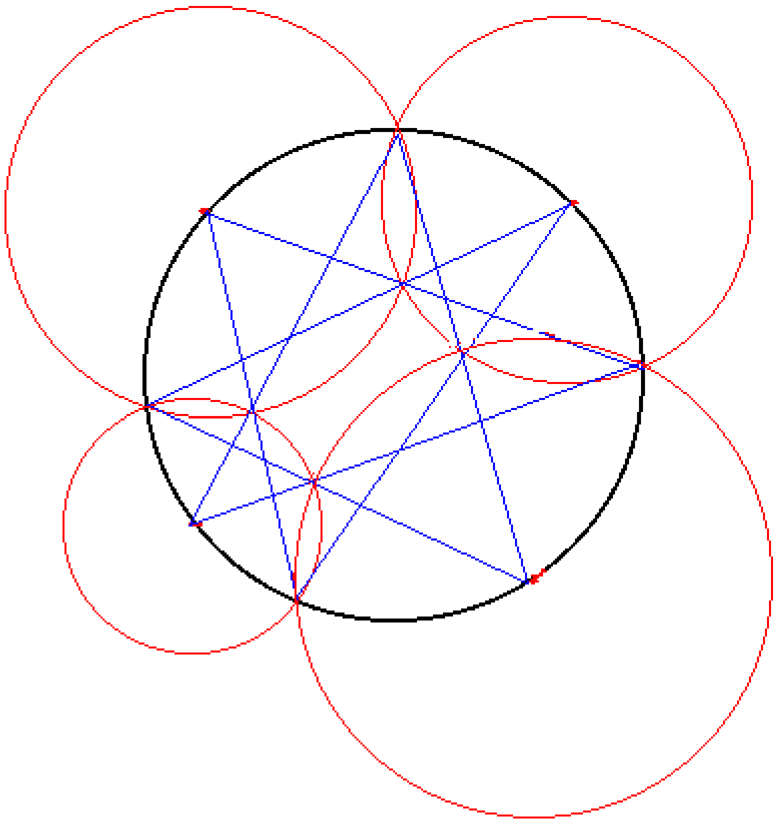


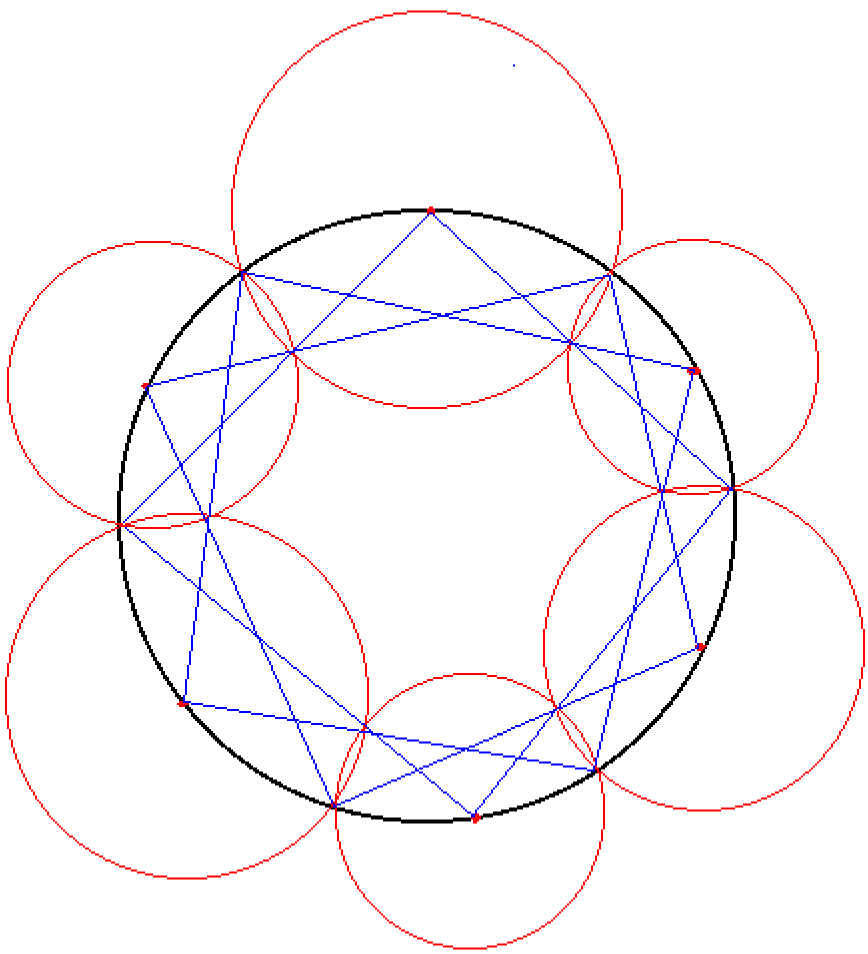
同一円周上を中心とする任意の大きさの円を5つならべて、円周上で交差するように置くと、円周上にない交点を結んで上のような星形が描けるというのです。
ところがこの操作は円の数が5のときにしか成り立ちません。まるで五弁の花が自然界に多いのは多少不ぞろいでも美しくみえるからと暗示しているような不思議さです。

ところで、円の数が5以外のときを検証しているさいに、5にかぎらずどんな数でも（4以上）成り立つ定理があることに気付きました。



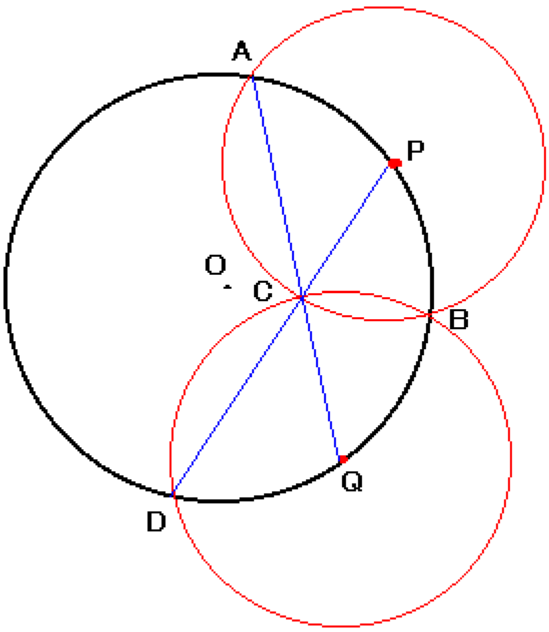
図はさきほどとおなじ円の配置ですが、赤い円の
外側の交点→内側の交点→円の中心→内側の交点→外側の交点
を結ぶ作業をくりかえすと星形が描けるのです。
円が4つと6つの場合です。





円が4つ、5つのばあいは一筆書きの星形、円が6つのばあいは3つの四角形が重なった星形です。このちがいはある頂点の3つ先の頂点を結んでいくという規則性によるものと思われます。いいかえると3の倍数の個数の円のばあいは一筆書きにならないということです。

さてこのような定理を説明するためには、つぎのようなことがらを証明できればよさそうです。



円Oの円周上の点Pを中心とする円が円Oと交わる点をA, Bとする。
円Oの円周上の点Qを中心とし点Bを通る円が円Oと交わるもう一つの点をD、円Pと交わるもう一つの点をCとすると、
点Cは線分AQおよび線分DPの上にある。