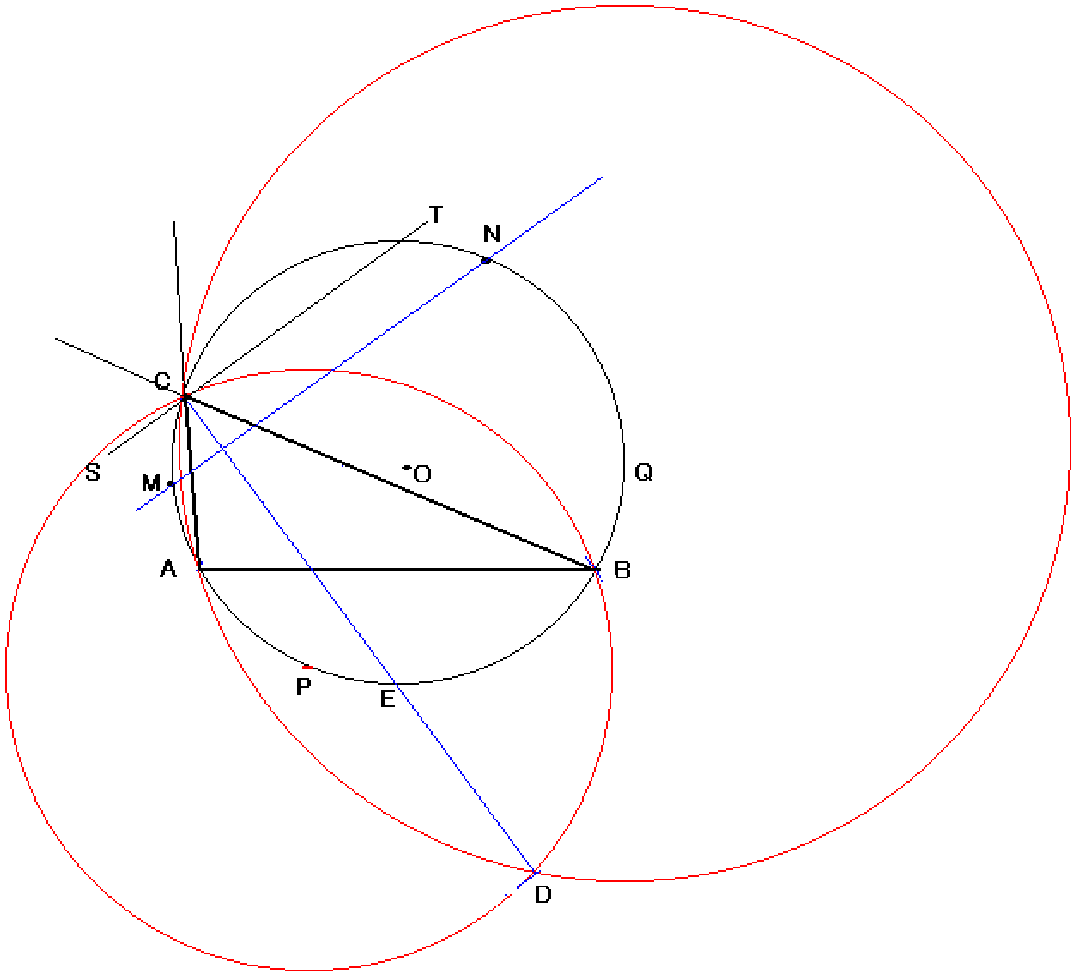
三角形の外接円から内接円を作図する方法（その６）

中川宏

（その３）円とその弦ABがあるとき、円周上の任意の点Pを中心としてBを通る第2の円が最初の円と交わる点をCとします。第1の円周上の点を中心としCとAを通る第3の円を描きます。第2と第3の円の交点をDとすると、線分CDは円弧ABを点Eで二等分するようです。

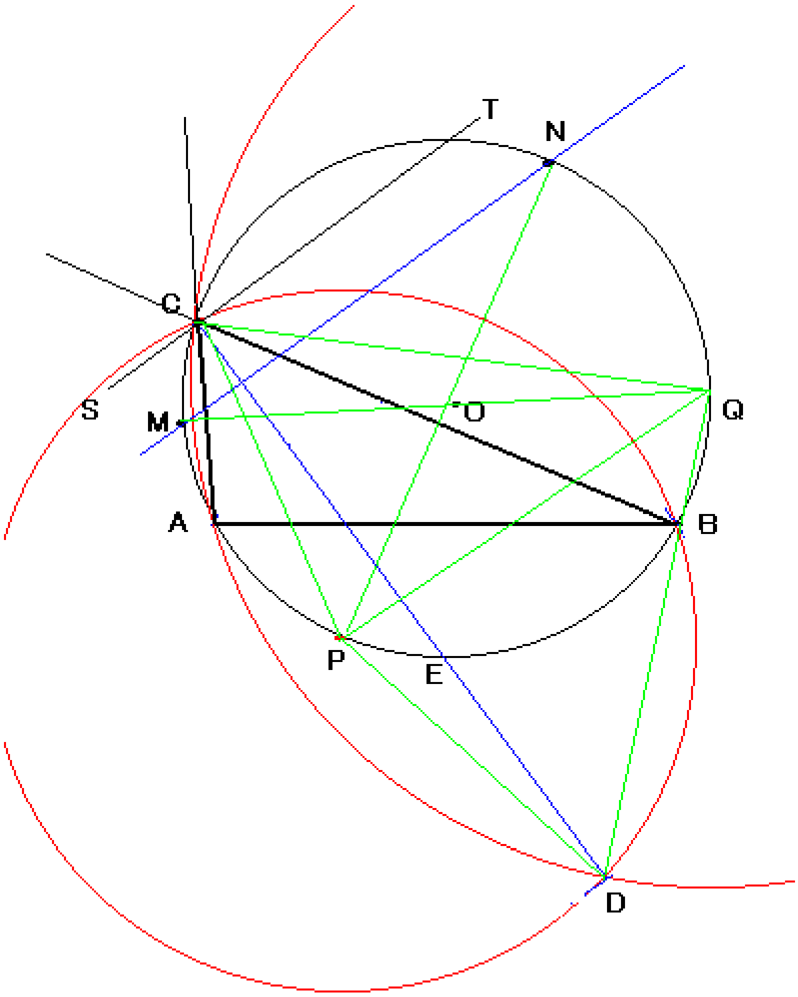
このことを自力で証明することができなかったので、一松先生にお願いして教えていただきました。



１０月１７日付けのお手紙拝見いたしました。いろいろと円を描いて面白い結果を探しておられるのに感心しています。但し少々色々な円を描きすぎてかえって本質を解りにくくしていらしたように感じました。
確かに貴兄の予想されたとおり、Ｅは円弧<u>ＡＢ</u>の中点であり、Ｆは内心、ＣＤと円Ｅとの他の交点[Ｄ]は∠Ｃ内の傍心です。
その証明には、図を簡潔にして次のように考えるとよいでしょう。

補助定理
円に内接する三角形ＡＢＣについて円弧ＡＣ、ＢＣの（他の頂点と反対側の）中点をM，Ｎとする。直線MNは∠Ｃの外角の二等分線ＳＣＴに平行である。
証明
∠ＳＣＡ＝１／２∠Ｃの外角＝π／２－Ｃ／２である。
∠MＣＡは弧MＡ上の円周角だが、MＡ＝１／２ＣＡなのでＣＡ上の円周角∠Ｂの半分に等しい。したがって
∠ＳＣM＝∠ＳＣＡ－∠MＣＡ＝π／２－Ｃ／２－Ｂ／２＝Ａ／２である。
他方、∠ＣMＮはＣＮ上の円周角だが、ＣＮがＢＣの半分なので、ＢＣ上の円周角∠Ａの半分に等しい。すなわち∠ＣMＮ＝Ａ／２＝∠ＳＣＡ
だからＳＣはMＮに平行である。

さて、貴兄の作図で円ＣＢＤの中心Ｐは円周上Ｂ，Ｃから等距離の点なのでＮの対点（直径の他端）です。同様にＱはMの対点です。
MＮＱＰは各内角が直角で長方形であり、ＰＱ//MＮ//Ｃの外角の二等分線です。作図により、ＣＰ＝ＰＤ、ＣＱ＝ＱＤで四角形ＣＰＤＱは凧形であり、その対角線は互いに直交します（二等辺三角形△ＣＰＤについてＣＤの垂直二等分線がＰＱ）。
したがってＣＤは∠Ｃの内角の二等分線であり、円周との交点ＥはＡＢの中点になります。 ■



Ｅを中心としてＡ，Ｂを通る円が直線ＣＥＤと交わる点が内心と∠Ｃ内の傍心であることは、逆に先便に記したとおり、内心Ｉと∠Ｃ内の傍心ＪとがＥからＥＡ＝ＥＢの距離にあること（△ＡＥＩが二等辺三角形　ＥＡ＝ＥＩである

こと）などを示して証明できます。　■

気がつけば難しい内容ではありませんが、余り多くの円を描いたためにかえってわかりにくくなった感じを受けました。上記の証明は、「余分」な線を除いて何を示せばよいか、と簡略化して気付いたものです。
とりいそぎお返事まで。

なかなか租借出来ませんが、内角の二等分線が外角の二等分線と直交すること、凧形の対角線が直交することなど、予想もしなかった展開に驚くとともに、初心者にもていねいに説明してくださる一松先生の素晴らしさにあらためて感謝いたしました。