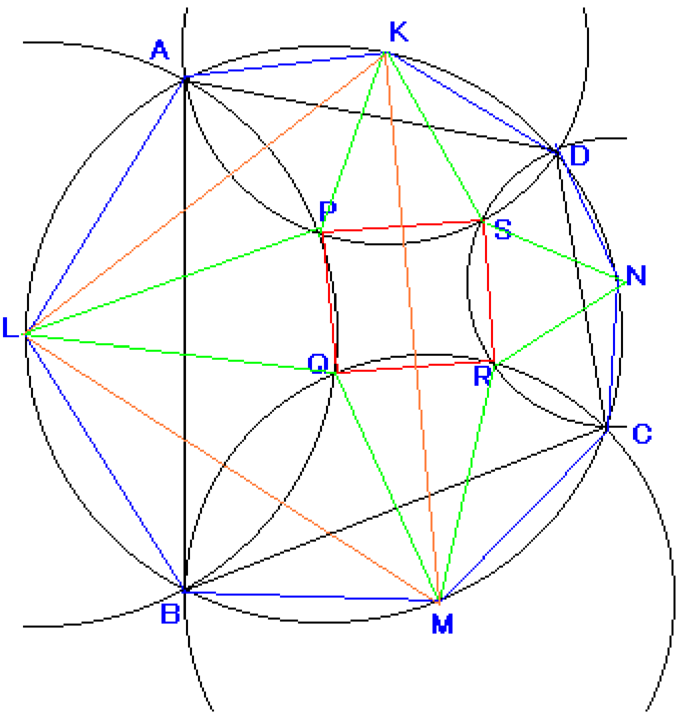
四弁花長方形の定理：一松先生による証明

中川宏

翌日には、一松信先生から、図解入りの証明をいただきました。
以下はその全文の写しです。

円に内接する四角形ABCDの円弧AB、BC、CD、DAの中点をL，M，N，Kとし、それらを中心としてそれぞれの弧の両端を通る円を描く。隣りどうしの円の交点をP，Q，R，Sとすると、四角形PQRSは長方形である。



証明　一例として点Qのまわりの角を考える。

∠LQP＋∠LQM＋∠MQR＝270°　・・・（1）

を示せば、残りの角∠PQR＝90°であり、他の頂点も同様である。

△LBMと△LQMとは、その作図により

LB＝LQ、MB＝MQ、LMは共通だから合同である。

したがって∠LQM＝∠LBM＝180°－弧LM上の円周角 （以後、弧LM上の円周角（劣弧上の小さいほうの角）を∠LMと略記する。）

＝180°－1／2（∠AB＋∠BC）・・・（2）

他方、

∠ALB＝180°－∠AB、∠BLQ＝2∠BLM、2∠BM＝∠BC

同様に
∠ALP＝2∠ALK、2∠$\underline{AK}$＝∠$\underline{AD}$
これから
∠PLQ＝∠ALB－（∠ALP＋∠BLQ）＝180°－∠$\underline{AB}$－∠$\underline{BC}$－∠$\underline{AD}$
＝∠$\underline{CD}$　（∠$\underline{AB}$＋∠$\underline{BC}$＋∠$\underline{CD}$＋∠$\underline{DA}$＝1／2（中心角の和）
＝1／2×360°＝180°である。）
したがって
∠LQP＝90°－1／2∠PLQ＝90°－1／2∠$\underline{CD}$･･･（3）　同様に、
∠MQR＝90°－1／2∠$\underline{AD}$･･･（4）
である。したがって（1）の左辺は
∠LQP＋∠LQM＋∠MQR
＝90°－1／2∠$\underline{CD}$＋90°－1／2∠$\underline{AD}$＋180°－1／2（∠$\underline{AB}$＋∠$\underline{BC}$）
＝360°－1／2（∠$\underline{AB}$＋∠$\underline{BC}$＋∠$\underline{CD}$＋∠$\underline{AD}$）
＝360°－1／2×180°＝270°
となって（1）が証明できた。すなわち∠PQR＝360°－270°＝90°である。
他の内角も同様である。■

付記

これらの角の計算から
∠PLQ＋∠QMR＋∠RNS＋∠SKP＝180°
といった関係もでます。
四角形ABCDの形によっては、ずいぶんつぶれた長方形PQRSもできます。