黄金比・黄金二乗比および白銀比・白銀二乗比に基づく対数螺旋

平成２３年９月１２日
金　原　博　昭

１．　初めに

２０１０年６月末に、「黄金菱形と白銀二乗菱形の組み合わせで平面充填が可能になる」ということが新たに見出されました。この事実は、「黄金比と白銀二乗比の間には密接な関係がある」ということを示しています。三次元における黄金比・白銀比間の相互補完性はすでに２００９年に発見されていますが、この点を考慮すると、この新たなタイル貼りは、「二次元においては黄金比・白銀二乗比間に相互補完性が存在する」ということを示しているように思われます。

すでに知られているように、２辺の長さの比が黄金比である黄金長方形から対数螺旋が生まれます。対数螺旋はまた、２辺の長さの比が白銀比である白銀長方形からも生まれます。これら既知の事実は、黄金比・黄金二乗比や白銀比・白銀二乗比に基づく対数螺旋が他にも存在する可能性を示唆しています。この論文は、これらの可能性について研究した結果をまとめたものです。

２．　黄金比・黄金二乗比や白銀比・白銀二乗比に基づく対数螺旋

正五角形には二種類の黄金三角形が内包されています。一つは斜辺と底辺の長さの比が１：ϕ である鈍角二等辺三角形であり、もう一つは斜辺と底辺の長さの比が ϕ：１になっている鋭角二等辺三角形です。そこで、辺の長さの比が ϕ：１である二等辺三角形を黄金三角形と定義すれば、下記の命題が成り立ちます。

命題：　正五角形は、2 つの対角線によって合同な鈍角黄金三角形２つと鋭角黄金三角形１つに分割される。

ペンローズの非周期的タイル貼りは 2 種類があり、一つは太い菱形と細い菱形のセット、もう一つは矢形と凧形のセットです。この凧形と矢形各々の半分の二等辺三角形が上記の 2 種類の黄金三角形に相当します。これら 2 つの黄金三角形には際立った特色があります。仮に鈍角黄金三角形をＡ、鋭角黄金三角形をＢと名付けると、Ａから最大のＢを切り取ると残りの部分がＡになり、それからさらに最大のＢを切り取ると、残りの部分がやはりＡになります。逆に、Ｂから最大のＡを切り取ると残りの部分がＢになり、それからさらに最大のＡを切り取ると、残りの部分がやはりＢになります。これは、２辺の長さの比が黄金比である黄金長方形のもっている性質、すなわち「黄金長方形から最大の正方形を切り取ると残りの部分が黄金長方形になり、この関係が無限に続く」 によく似ています。

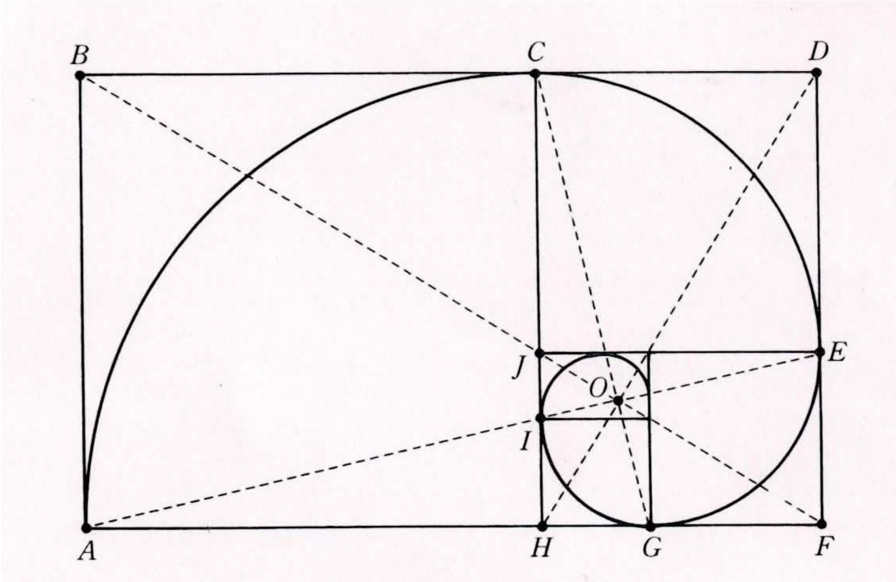
上記の黄金三角形の定義に基づいて、これらの黄金三角形に対応する『白銀三角形』とはどんなものなのかを考えてみます。すると、黄金三角形ＡあるいはＢに対応するのが正方形の半分の直角二等辺三角形であることがすぐにわかります。そこで、斜辺と底辺の長さの比が１：$\sqrt{2}$ の直角二等辺三角形を白銀三角形と定義すれば、下記の命題が成り立ちます。

命題：　正方形は、1 つの対角線によって合同な 2 つの白銀三角形に分割される。

この三角形には白銀長方形とよく似た特徴、つまり「限りなく半折りを続けても必ず相似形の二等辺直角三角形になる」があります。

すでに述べたように、黄金長方形には正方形が無限に含まれていますが、これら一連の正方形にその辺の長さを半径とする四分円を書き込んでいくと、図１が示すように、対数螺旋に極めて近い曲線が得られます。これはケプラーの著作に書かれている近似法です。

図1　黄金長方形に基づく対数螺旋の近似的作図



一般的に対数螺旋は $r = B^{\theta}$ のように極座標（r, θ）を用いて表わされますが、Bの値は螺旋の種類ごとに異なります。対数螺旋はまた、上記の 2 種類の黄金三角形、および黄金菱形、白銀菱形、白銀長方形、白銀三角形、からも生まれます。そして、これらは全て同様の極方程式で表されます。

直方体の3つの異なる面のうち、2つが白銀長方形で3つ目が縦横2辺の長さの比が白銀二乗比である白銀二乗長方形である立体は『白銀直方体』と呼ばれています。この白銀二乗長方形は、黄金長方形１つと縦横２辺の長さの比が黄金二乗比である黄金二乗長方形１つから構成されます。ところが、この黄金二乗長方形は、白銀二乗長方形１つと黄金長方形１つから構成されるのです。この関係を下記の2つの図に示しました。

図2　黄金長方形と黄金二乗長方形から構成される白銀二乗長方形

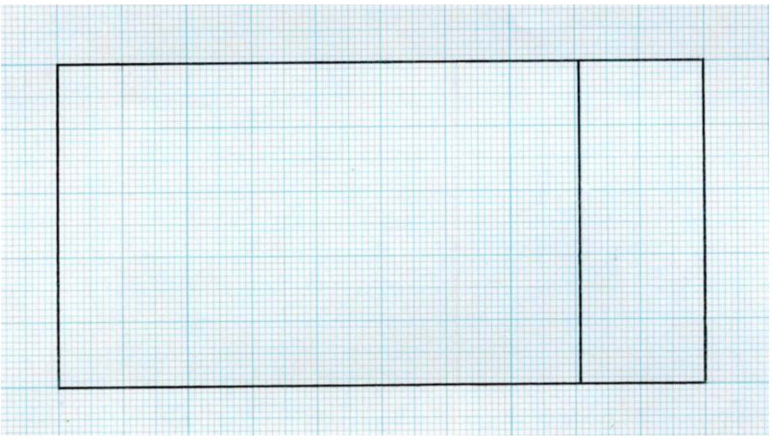
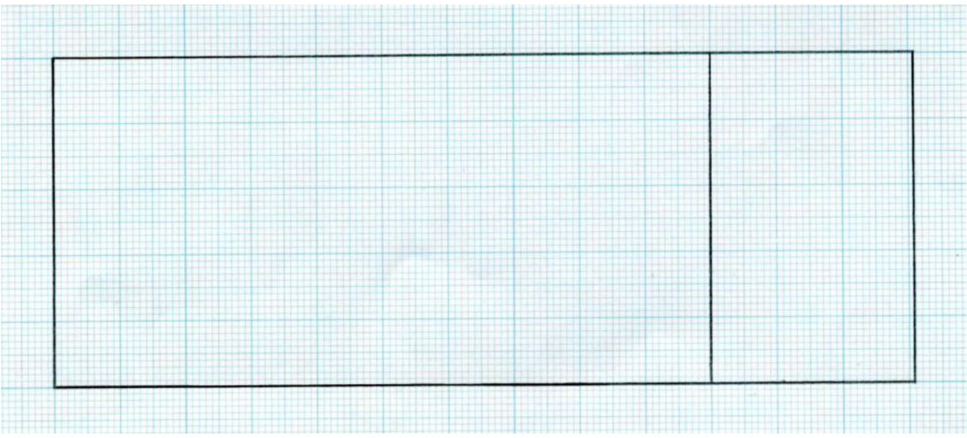


図3　白銀二乗長方形と黄金長方形から構成される黄金二乗長方形



ということは、白銀二乗長方形には黄金長方形が無限に含まれることになります。この事実もまた、「二次元においては黄金比・白銀二乗比間に相互補完性が存在する」ということを示唆しているように思われます。図4に示されているように、2つの異なった流れに沿って黄金長方形が並び、白銀二乗長方形を埋め尽くしていきます。これはまた、「黄金二乗長方形は黄金長方形を無限に含む」ということにもなります。この白銀二乗長方形からも2つの新たな対数螺旋が生まれ（図4参照）、上記の螺旋群と同様の極方程式で表されます。これら2つの螺旋は同じものであり、その中心も同一です。

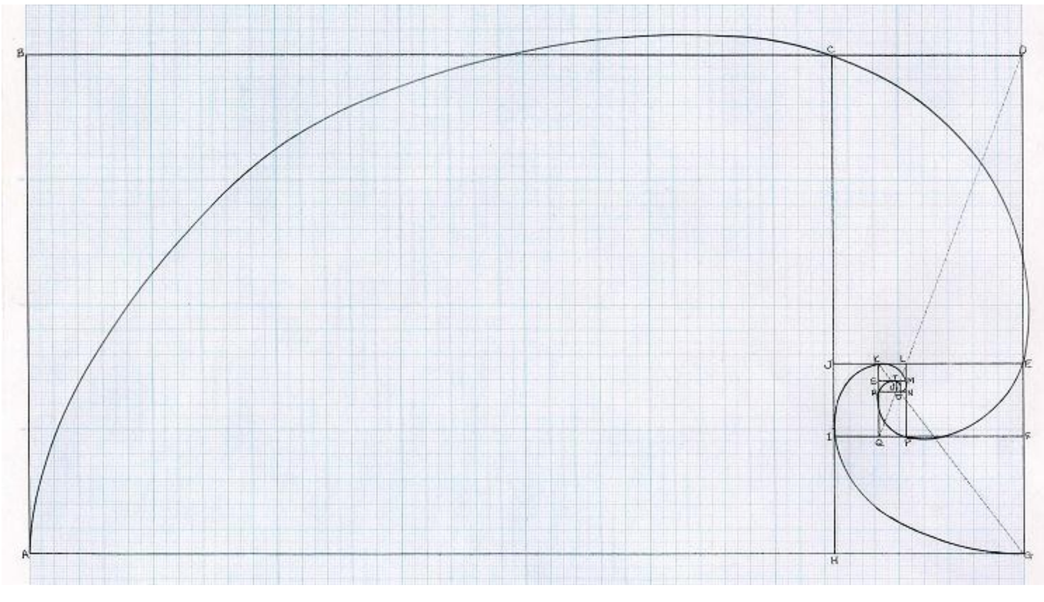
実は対数螺旋は 2 つの異なった極方程式で表すことができるのです。一つは上記の $r = B^{\theta}$ であり、もう一つは

$$r = ae^{\theta \cot b}$$

です。この式において、a は θ が 0 のときの r の長さです。また、$\psi=\pi-b$ とすると、ψ は座標の中心から引いた直線と螺旋の接線とが成す角度になります。これら2つの式は同等ですので、これから b および ψ の値を計算することが可能です。この計算方法は宮城県立がんセンターの佐藤郁郎先生に教えて頂きましたが、b = arctan (1/log B) になります。

図4　白銀二乗長方形に基づく2つの対数螺旋

（白銀二乗長方形には無限の数の黄金長方形が含まれる）



以上述べた 8 つの対数螺旋の B の値とその理由、および b と ψ の値を下記の表にまとめました。

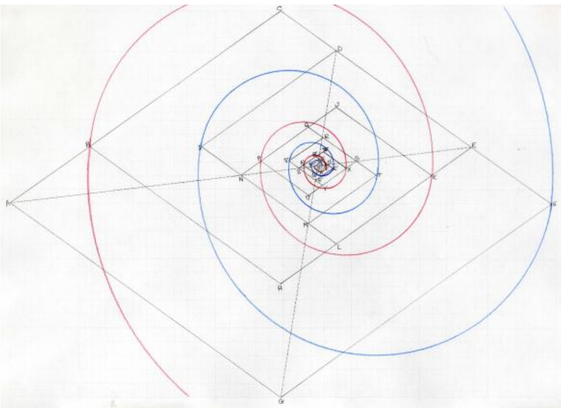
	r = B のθ乗		r = a x [e の(θ x cotb)乗]	
	Bの値	理由	b の値	ψの値 (ψ=π−b)
黄金長方形に基づく螺旋	B= φの (2/π)乗	θがπ/2=90° 進むごとに r の値がφ(黄金比)倍になる	0.405376π	0.594624π
白銀長方形に基づく螺旋	B= √2の (2/π)乗	θがπ/2=90° 進むごとに r の値が√2(白銀比)倍になる	0.430877π	0.569123π
鋭角黄金三角形に基づく螺旋	B= φの (5/3π)乗	θが 3π/5=108° 進むごとに r の値がφ(黄金比)倍になる	0.420438π	0.579562π
鈍角黄金三角形に基づく螺旋	B= φの 2 乗の (5/2π)乗	θが 2π/5=72° 進むごとに r の値がφの二乗(黄金二乗比)倍になる	0.2919π	0.7081π
白銀三角形に基づく螺旋	B= 2の (2/π)乗	θがπ/2=90° 進むごとに r の値が2(白銀二乗比)倍になる	0.36772π	0.63228π
黄金菱形に基づく螺旋	B= φの 2 乗の (1/π)乗	θがπ=180° 進むごとに r の値がφの二乗(黄金二乗比)倍になる	0.405376π	0.594624π
白銀菱形に基づく螺旋	B= 2の (1/π)乗	θがπ=180° 進むごとに r の値が 2 (白銀二乗比)倍になる	0.430877π	0.569123π
白銀二乗長方形・黄金二乗長方形に基づく螺旋	B= φの 2 乗の (2/π)乗	θがπ/2=90° 進むごとに r の値がφの二乗(黄金二乗比)倍になる	0.325π	0.675π

この表が示すように、黄金菱形に基づく螺旋は黄金長方形に基づく螺旋と同等になります。B と b の値が同じになるからです。また、白銀菱形に基づく螺旋と白銀長方形に基づく螺旋も、同様の理由から同じになります。それゆえ、黄金比・黄金二乗比および白銀比・白銀二乗比に基づく螺旋の種類は全部で 6 種類ということになります。

3. 対数螺旋の近似的作図方法

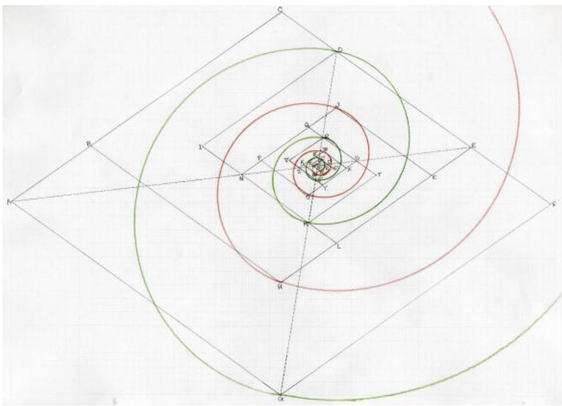
上記の 8 つの螺旋のうち、黄金長方形に基づく螺旋と鋭角黄金三角形に基づく螺旋については、それらを近似的に作図する方法が公開されていますが、他の螺旋に関するそのような情報はこれまで発表されていませんでした。そこで、いろいろと研究したところ、残りの 6 つのうち、『白銀二乗長方形・黄金二乗長方形に基づく螺旋』と『黄金菱形に基づく螺旋』以外の螺旋については、新たに近似的作図方法が見出されましたので、それらを下記に示しました。

図5 白銀菱形鋭角の頂点に基づく対数螺旋の近似的作図



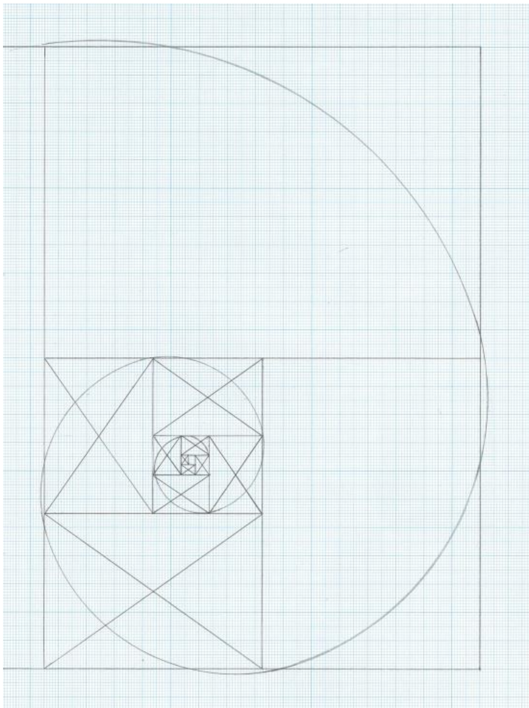
一連の菱形の鋭角の頂点を中心として半円を描く

図6 白銀菱形鈍角の頂点に基づく対数螺旋の近似的作図



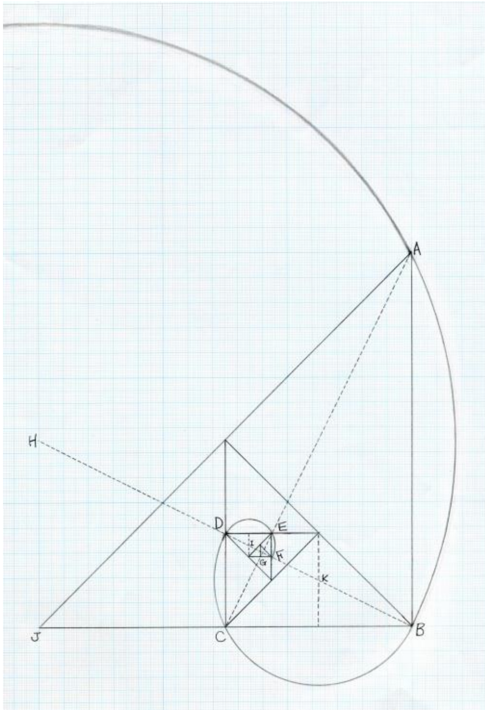
一連の菱形の鈍角の頂点を中心として半円を描く

図7　白銀長方形に基づく対数螺旋の近似的作図



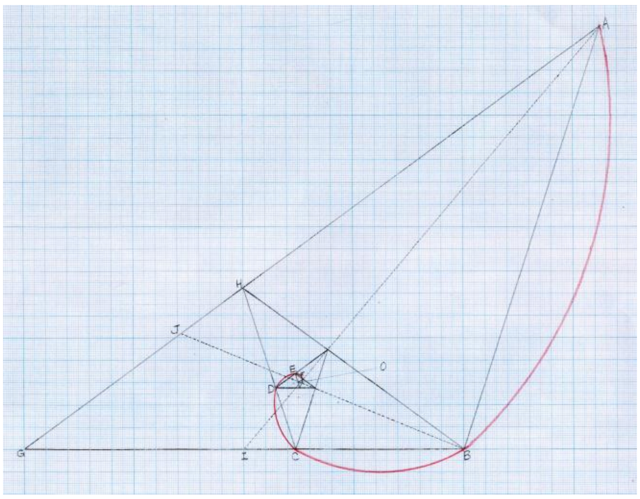
一連の白銀長方形の対角線を中心として四分円を描く

図8　白銀三角形に基づく対数螺旋の近似的作図



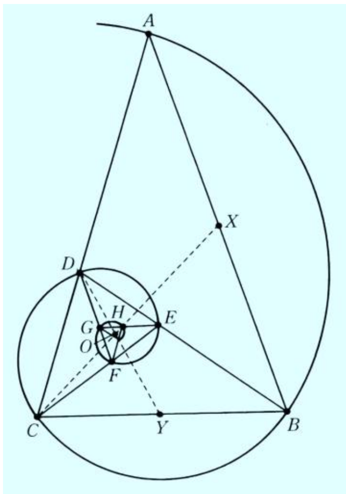
一連の白銀三角形の斜辺の中点を中心として
四分円を描く

図9　鈍角黄金三角形に基づく対数螺旋の近似的作図



鈍角黄金三角形の2つの等辺のうちの1つ AB を底辺とする正三角形を描き、その正三角形の頂点を中心として AB を結ぶ六分円を描く。そして、このプロセスを続けて各六分円が繋がるようにする。

図10　鋭角黄金三角形に基づく対数螺旋の近似的作図



鈍角黄金三角形 ADB の頂点 D を中心として AB を結ぶ 108°の円弧を描き、次に E を中心として BC を結ぶ円弧を描く。さらに、F、G、H 等を中心とする円弧を描く。

これらのうち、鋭角黄金三角形に基づく対数螺旋の近似的作図（図10）は、筆者が新たに見出したものではなく、既に発表済みのものです。

以上の考察は、白銀比がさまざまの面で黄金比と同等の数学的重要性をもっていることを示唆するものと思われます。

●参考文献

[1] A・ボイテルスパッヒャー　&　B・ペトリ （柳井浩訳）、「黄金分割 --自然と数理と芸術と --」、共立出版、2005

[2] 宮崎興二、「かたちのパノラマ」、丸善、2003