オイラーの定理と正多面体

中川宏

多面体の頂点数Ｖ、稜の数Ｅ、面数Ｆとおいたときに
Ｖ－Ｅ＋Ｆ＝２
がつねに成り立つ（ドーナツ型などを除く）というのが、有名なオイラーの定理ですが、このような指標のあいだに正多面体に固有の関係はあるでしょうか？

	頂点（V）	稜（E）	面（F）
正4面体	4	6	4
立方体	8	12	6
正8面体	6	12	8
正12面体	20	30	12
正20面体	12	30	20

すぐには思いつかなかったので、アルキメデスの立体にまでひろげて、Ｅ／Ｖをもとめてみました。

	頂点（V）	稜（E）	面（F）	E／V
正4面体	4	6	4	1.5
立方体	8	12	6	1.5
正8面体	6	12	8	2
正12面体	20	30	12	1.5
正20面体	12	30	20	2.5
立方8面体	12	24	14	2
20･12面体	30	60	32	2
切頂4面体	12	18	8	1.5
切頂立方体	24	36	14	1.5
切頂8面体	24	36	14	1.5
切頂12面体	60	90	32	1.5
切頂20面体	60	90	32	1.5
小菱形立方8面体	24	48	26	2
大菱形立方8面体	48	72	26	1.5
小菱形20･12面体	60	120	62	2
大菱形20･12面体	120	180	62	1.5
ねじれ立方体	24	60	38	2.5
ねじれ12面体	60	150	92	2.5

するとＥ／Ｖは、１．５と２と２．５の３つのグループに分かれました。２×Ｅ／Ｖは、一つ

の頂点に集まる稜の数（頂点の価数）をあらわしますので、１．５は3価、2は4価、2.5は5価の頂点を持つことを示しています。これらのグループにはなにか共通な特徴があるでしょうか？

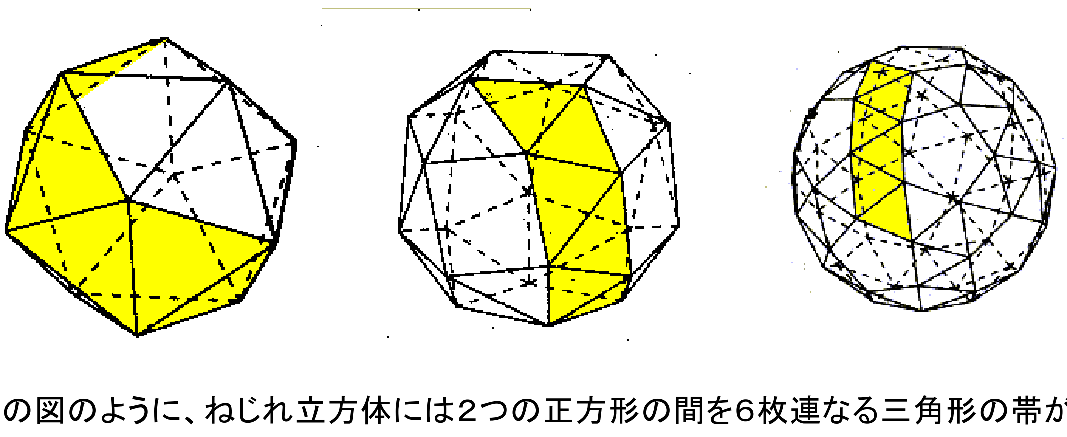
E／V＝2のグループ

	E／V	大円	小円
正8面体	2	3	
立方8面体	2	4	
20･12面体	2	6	
小菱形立方8面体	2		6
小菱形20･12面体	2		12
正20面体	2.5		12

ここにいう大円・小円は便宜的なものですが、地球儀になぞらえて赤道に当たるものを大円、それ以外の緯度線にあたるものを小円と呼んでいます。上の表のように、E／V＝2のグループに属する立体はすべて大円又は小円を持っています。プラトン・アルキメデス立体の中では他には正20面体が小円をもつだけです。
これらの立体は大円あるいは小円に沿って切断すると正多角形面ができることから、ジョンソン立体に数多く利用されています。

E／V＝2．5のグループ

正20面体とねじれ立方体、ねじれ12面体には何か共通な特徴があるでしょうか？



この図のように、ねじれ立方体には2つの正方形の間を6枚連なる三角形の帯が見えます。ねじれ12面体では6枚連なる三角形の帯が2つの正五角形をつないでいます。そういう目で見ると正20面体も天地の正三角形のあいだを6枚の連なる三角形

の帯が3本つないでいるということもできます。
正三角形が連なる帯の一つの頂点に注目すると、そこには60×3＝180度がすでにあるわけですから、あと2枚の正多角形が集まって不足角が生じるためには、
正三角形＋正三角形
正三角形＋正方形
正三角形＋正五角形
という組み合わせしかないことがわかります。これらの組み合わせに対応しているのが、正20面体、ねじれ立方体、ねじれ12面体だということになります。

この観点からE／V＝2のグループを見直してみると、4価の頂点は、
正8面体 [3,3,3,3]
立方8面体 [3,4,3,4]
20・12面体 [3,5,3,5]
小菱形立方8面体 [3,4,4,4]
小菱形20・12面体 [3,4,5,4]
となっています。
4価の頂点で可能な組み合わせのうち、ここにないものは、
5, 3, 4, 3
3, 3, 3, 4
3, 3, 3, 5
ですが、
3, 3, 3, 4は四角反柱
3, 3, 3, 5は五角反柱なのでアルキメデスの立体からは除かれています。
残る[5, 3, 4, 3]は試してみましたが、できそうにありませんでした。