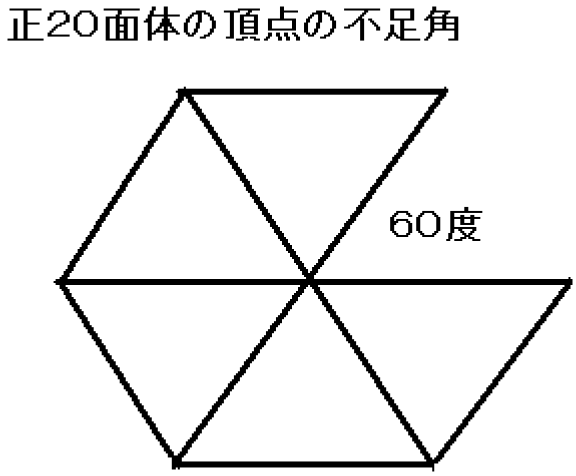
正１２面体と正２０面体ではどっちが丸いか？
木製正多面体模型の活用法（その４）

中川宏

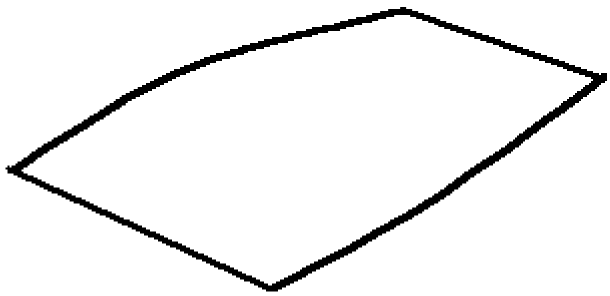
頂点まわりの鋭さを表す指標として「不足角」という考え方があることを知りました。
この場合は紙模型を使うとわかりやすいのですが、ある頂点に集まる一本の稜を切り開いて頂点に集まる面を平らにしたときに切り開いた稜が成す角度です。これが小さいほうが緩やかな頂点ということになります。
正１２面体の場合は３６０－１０８×３＝３６度
正２０面体の場合は３６０－６０×５＝６０度
ですから、正１２面体の頂点のほうが正２０面体の頂点より丸いということになります。

ところで、この「不足角」について、どんな多面体でもすべての「不足角」の合計は７２０度だという驚くべき定理を発見したのがかの有名なデカルトなのだそうです。



正四面体・・・１８０×４
正８面体・・・１２０×６
立方体・・・・９０×８
正１２面体・・３６×２０
正２０面体・・６０×１２
というように正多面体ではかんたんに確かめることが出来ます。
このデカルトの定理を利用すれば、不足角の総和は決まっているので、一様な頂点周りを持つ立体どうしなら、頂点の数だけで・頂点数の多いほうが丸いと決めることが出来ることになります。

ここで、不足角の合計の７２０度という数字はどのような意味があるのか気になりました。
立体をそのまま取り扱うのは複雑なので究極まで単純化して、２面体というものを考えてみることにしました。２面体というのは封筒のようなものですが、もちろん私が考えたものではなく、去年秋山先生の講演会に参加したおり、秋山の定理として知られる正４面体の曲線を含むどのような展開図も平面を充填するという事実は、封筒のような２面体でも成り立つと教わったことが頭の隅に残っていたものです。

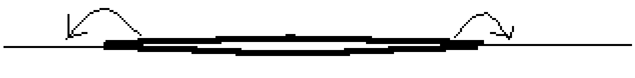


図は４角形ですが、何角形でもいいわけです。n 角形のとき、内角の総和は、いくつの三角形に分割できるかということから、１８０（n－２）度、裏表面あわせると
３６０（n－２）度なので、不足角は
n×３６０－｛３６０（n－２）｝＝７２０度
というわけです。

さて、不足角７２０度を２面分と考えると、１面当たり３６０度ともとれます。そうすると多角形の外角の総和は３６０度という定理と重なってきます。

角度のない状態

ちょっと考えると、ある角度（内角）の不足角は３６０－内角と思いがちですが、２つの線分が角度をなさない状態というのを考えると（真ん中の図）それは１８０度ですから、ある平面角の不足角は右の図のように、外角を意味することになります。
ここでまた、平面図形を究極まで押しつぶして２辺形（２角形）を考えます。



そうすると不足角（外角）の和は
１８０×２＝３６０度
となります。

線分をつなげて閉じた平面図形にするためには、線分どうしが角度をなすように配置していかなければなりません。結局その角度の総和がぐるっと一周分３６０度になったときにだけ閉じた図形は完成します。したがって多角形の外角（不足角）の和３６０度というのは平面そのものを意味することになります。
おなじように立体図形も閉じた立体にするためには、構成する面どうしが総計で全空間分の角度をなすように配置しなければなりません。それが７２０度というわけです。
平面は xy 直交座標によって４つの直角に分けられます。
これに対して空間は xyz 直交座標によって８つの立体直角部分に分けられます。
じっさい、８つの立体直角によって６つの平面が閉じて直方体になることがわかります。
一つの立体直角の不足角は１平面直角です。なので、８つの立体直角分の不足角は８平面直角＝７２０度と理解できます。
また、もっとも単純な立体図形である２面体の不足角が、多角形の外角の和の２面分とみなせることから、立体図形の不足角の総和は平面図形の外角の和２面分＝７２０度に還元できると理解してもいいのではないでしょうか。