正12面体の3等分輪切り

中川宏

「プラトンとアルキメデスの立体」でダウド・サットンはふしぎな事実を指摘しています。正12面体をテーブルに置いたときに、赤道付近にならぶ10の頂点をむすぶ2つの水平面によって、体積が3等分されるというのです。

たしかめてみましょう。

北半球の五角錐台の体積V_Dが正12面体の体積の1／3になるかどうかということです。

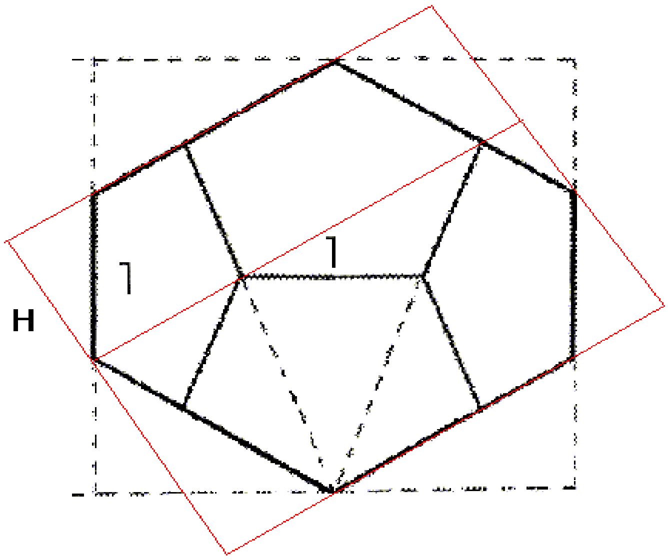
角錐台の体積は1／3×高さ×(底面積+√(底面積×天面積)+天面積)ですが、

正12面体の底面積$S_b = \tau^2 \times$天面積S_a

なので、底面積+√(底面積×天面積)+天面積)の部分は

$S_a+\tau S_a+\tau^2 S_a = (\tau^2+\tau+1)S_a = 2\tau^2 S_a$

一辺1の正五角形の面積$S_a = 1/4\sqrt{(4\tau^2-1)}\times(1+2/\tau)$



$H=\tau/\sqrt{(1+\tau^2)}$

角錐台の高さHは上の図から相似比により右のようになります。

したがって五角錐台の体積

$V_D=1/3\times\tau/\sqrt{(\tau^2+1)}\times 2\tau^2\times 1/4\sqrt{(4\tau^2-1)}\times(1+2/\tau)$

$\quad =1/3\times\tau/\sqrt{(\tau^2+1)}\times\tau\times 1/2\sqrt{(4\tau^2-1)}\times(\tau^2+1)$

$\quad =\tau^2/6\times\sqrt{(4\tau^2-1)}\times\sqrt{(\tau^2+1)}$

ところで、正12面体の体積$V_{12}=\sqrt{5}/2\times\tau^4$ と比較するために、上の式の√のなかからτをひっぱりだすと、

$1/\tau=\tau-1$を利用して、

$V_D=1/3\times\tau^4\times 1/2\times\sqrt{(\tau+2)}\sqrt{(3-\tau)}$

ところが不思議なことに

$(\tau+2)(3-\tau)=-\tau^2+\tau+6=-(1+\tau)+\tau+6=5$

となって√のなかからτが消えてしまうのです。よって

$V_D=1/3\times\tau^4\times1/2\times\sqrt{5}$

となり、五角錐台の体積V_Dは正12面体の体積V_{12}の1／3であることが確かめられました。

この計算、途中はいったいどうなるのやらと不安が募りますが、突然最後に視界が開ける感じでした。立方体から正12面体を切り出すときの状況ととてもよく似ています。