正多面体と外接球

中川宏

正１２面体と正２０面体の、それぞれの外接球、内接球との関係はつぎのようになっています。

正１２面体の外接球の半径：${}_0R_{12}$　正１２面体の一辺：a_{12}

正２０面体の外接球の半径：${}_0R_{20}$　正２０面体の一辺：a_{20}

${}_0R_{12}=1.4012a_{12}$

${}_0R_{20}=0.9511a_{20}$

${}_0R_{12}={}_0R_{20}$　と球の大きさを同じにしたときには、

$a_{12}=\sqrt{(\tau^2+1)}/\sqrt{(\tau^4+1)}=0.6787a_{20}$　という関係があります。

これらをもとに、a_{20}の関係式として整理すると、

外接球の体積${}_0V=4/3\pi({}_0R_{20})^3=3.602(a_{20})^3$にたいして、

正１２面体の体積$V_{12}=(15+7\sqrt{5})/4\cdot a_{12}{}^3=2.3957(a_{20})^3$・・６６．５％

正２０面体の体積$V_{20}=5(3+\sqrt{5})/12\cdot a_{20}{}^3=2.1817(a_{20})^3$・・６０．６％

外接球の面積${}_0S=4\pi({}_0R_{20})^2=11.363(a_{20})^2$にたいして、

正１２面体の面積$S_{12}=3\sqrt{(25+10\sqrt{5})}\,a_{12}{}^2=9.5101(a_{20})^2$・・８３．７％

正２０面体の面積$S_{20}=5\sqrt{3}\cdot a_{20}{}^2=8.6603(a_{20})^2$・・７６．２％

となります。

これに関連して、「プラトンとアルキメデスの立体」（ダウド・サットン、ランダムハウス講談社）に次のような指摘がありました。

「同じ大きさの球に内接する正１２面体と正２０面体の面積の比は、体積の比に等しい。」

確認してみましょう。

$V_{12}/V_{20}=S_{12}/S_{20}=1.0981$

となり確かに一致しています。

ほかは$\sqrt{5}$を含む式で、S_{20}だけ$\sqrt{3}$をふくむ式なのに不思議な気がします。