正多面体と内接球の定理

中川宏

正１２面体と正２０面体のどっちが丸いかを調べるために計算していて気がついたことがあります。

内接球の体積 $_{I}V=4/3\pi({}_{I}R_{20})^3=1.808(a_{20})^3$ にたいして、
正１２面体の体積 $V_{12}=2.3957(a_{20})^3$・・１３２．５％
正２０面体の体積 $V_{20}=2.1817(a_{20})^3$・・１２０．７％
内接球の面積 $_{I}S=4\pi({}_{I}R_{20})^2=7.175(a_{20})^2$ にたいして、
正１２面体の面積 $S_{12}=9.5101(a_{20})^2$・・１３２．５％
正２０面体の面積 $S_{20}=8.6603(a_{20})^2$・・１２０．７％

ずいぶん計算ミスではないかと確かめたのですが、間違いないようです。正１２面体も正２０面体も内接球にたいして体積の拡大率と表面積の拡大率が一致するのです。
$V_{12}/{}_{I}V_{12}=S_{12}/{}_{I}S_{12}=1.325\cdots$
$V_{20}/{}_{I}V_{20}=S_{20}/{}_{I}S_{20}=1.207\cdots$

不思議なことがあるものだとおもって、他の３種類の正多面体についても調べてみたのですが、あに図らんや、すべて一致しました。
$V_{8}/{}_{I}V_{8}=S_{8}/{}_{I}S_{8}=3\sqrt{3}/\pi=1.654\cdots$
$V_{6}/{}_{I}V_{6}=S_{6}/{}_{I}S_{6}=6/\pi=1.910\cdots$
$V_{4}/{}_{I}V_{4}=S_{4}/{}_{I}S_{4}=6\sqrt{3}/\pi=3.308\cdots$

つまり、
正多面体の体積/内接球の体積＝正多面体の表面積/内接球の表面積
ということです。
（夏休みの自由研究でした。すべての小数表示を τ と π と√を使った分数表示に変換していただくと説得力があると思うのですが、複雑で私の手に負えません。）