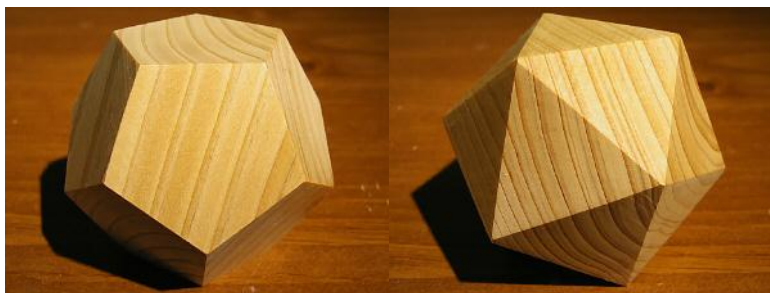


## 正12面体と正20面体ではどっちが丸いか？

### 木製正多面体模型の活用法（その2）

#### [2] 触って比較する

見た目ではどちらが丸いともいえないなら、触ってみたらどうでしょうか。じつはこの触ってみるという観察にとっては、私が製作している木製正多面体模型はうってつけだと



思っています。掌で握ったり回したりするのにちょうどいい大きさなのです。

そこでまわりのひとに触ってみてどちらがより丸く感じますか？と、アンケート調査を試みました。すると、多くの方は迷うという傾向がでました。つまり触覚でも甲乙つけがたいと思われるのです。その理由を考えてみましょう。

掌で木製の模型を触るときには、てのひらには、立体の面を感じるのところと頂点を感じるのところができます。もし面を感じる部分で球をイメージすればそれは正多面体にとっての内接球、頂点を感じる部分で球を思い描けば外接球を意味します。ひとはこの2種類の球と多面体を比較することが出来るといえるでしょう。

正12面体と正20面体の、それぞれの外接球、内接球との関係はつぎのようになっています。

正12面体の外接球の半径： ${}_0R_{12}$  正12面体の一辺： $a_{12}$

正20面体の外接球の半径： ${}_0R_{20}$  正20面体の一辺： $a_{20}$

とすると、（その1）での計算結果から、

$${}_0R_{12} = 1.4012 a_{12}$$

$${}_0R_{20} = 0.9511 a_{20}$$

${}_0R_{12} = {}_0R_{20}$  と球の大きさを同じにしたときには、

$$a_{12} = 0.6787 a_{20} \text{ という関係があります。}$$

これらをもとに、 $a_{20}$ の関係式として整理すると、

外接球の体積 ${}_0V = 4/3 \pi ({}_0R_{20})^3 = 3.602 (a_{20})^3$ にたいして、

$$\text{正12面体の体積 } V_{12} = (15 + 7\sqrt{5})/4 \cdot a_{12}^3 = 2.3957 (a_{20})^3 \cdots 66.5\%$$

$$\text{正20面体の体積 } V_{20} = 5(3 + \sqrt{5})/12 \cdot a_{20}^3 = 2.1817 (a_{20})^3 \cdots 60.6\%$$

外接球の面積 ${}_0S = 4 \pi ({}_0R_{20})^2 = 11.363 (a_{20})^2$ にたいして、

$$\text{正12面体の面積 } S_{12} = 3\sqrt{(25 + 10\sqrt{5})} a_{12}^2 = 9.5101 (a_{20})^2 \cdots 83.7\%$$

$$\text{正20面体の面積 } S_{20} = 5\sqrt{3} \cdot a_{20}^2 = 8.6603 (a_{20})^2 \cdots 76.2\%$$

となります。

したがって、外接球にたいしては、正20面体よりも正12面体のほうが近いといえるでしょう。

他方、内接球との関係は、(その1)での計算結果から、

$${}_I R_{12} = 1.1135 a_{12}$$

$${}_I R_{20} = 0.7557 a_{20} \quad \text{であるが、}$$

$${}_I R_{12} = {}_I R_{20} \quad \text{と球の大きさを同じにしたときには、}$$

$$a_{12} = 0.6787 a_{20} \quad \text{という外接球の場合と同じ関係があります。以下同様に、}$$

$a_{20}$ の関係式として整理すると、

$$\text{内接球の体積 } {}_I V = 4/3 \pi ({}_I R_{20})^3 = 1.808 (a_{20})^3 \text{ にたいして、}$$

$$\text{正12面体の体積 } V_{12} = 2.3957 (a_{20})^3 \cdot \cdot 132.5\%$$

$$\text{正20面体の体積 } V_{20} = 2.1817 (a_{20})^3 \cdot \cdot 120.7\%$$

$$\text{外接球の面積 } {}_I S = 4 \pi ({}_I R_{20})^2 = 7.175 (a_{20})^2 \text{ にたいして、}$$

$$\text{正12面体の面積 } S_{12} = 9.5101 (a_{20})^2 \cdot \cdot 132.5\%$$

$$\text{正20面体の面積 } S_{20} = 8.6603 (a_{20})^2 \cdot \cdot 120.7\%$$

となります。

したがって、内接球にたいしては、正12面体よりも正20面体のほうが近いといえるでしょう。ようするに外接球と比較するのか、内接球と比較するのかによって、正12面体と正20面体のどちらがより球に近いかの判断はわかれるということがいえるのです。

ちなみに、局所的に尖った部分の鋭さに神経を集中させれば、正20面体のほうが尖って感じるでしょう。それは正12面体の三角錐の勾配と、正20面体の五角錐の勾配を比較することになりますから、

$$\text{正12面体の稜面角} = 121.7175^\circ$$

$$\text{正20面体の稜面角} = 110.9052^\circ$$

の差として感じるといえるでしょう。