ゼータの香りの漂う式（その8） [テイラーシステム]

＜ ζ(3)の香り Σe^(±1/4n)/n^3 の導出 ＞

（その7）の方法を使えばζ(3)の香りが漂う式も当然ながら導出できる。例えば、次のような式が簡単に出る。

e^(1/4)/1^3 + e^(1/8)/2^3 + e^(1/12)/3^3 + e^(1/16)/4^3 + ・・・
=ζ(3) + (1/4)^1・ζ(4)/1！+ (1/4)^2・ζ(5)/2！+ (1/4)^3・ζ(6)/3！+ (1/4)^4・ζ(7)/4！+・・・

e^(−1/4)/1^3 + e^(−1/8)/2^3 + e^(−1/12)/3^3 + e^(−1/16)/4^3 + ・・・
=ζ(3) − (1/4)^1・ζ(4)/1！+ (1/4)^2・ζ(5)/2！− (1/4)^3・ζ(6)/3！+ (1/4)^4・ζ(7)/4！− ・・・

e は自然対数の底（ネイピア数）。
左辺を見ると**ζ(3)の香りが漂っている**ことがわかる。これらも全く同様にして導くことができる。

[導出]
f(x)=e^(x/1)/1^3 + e^(x/2)/2^3 + e^(x/3)/3^3 + e^(x/4)/4^3 + ・・・
という関数f(x)を考える。ここで x は任意の実数。

f(x)の x に 1/4 を代入して、
f(1/4)=e^(1/4)/1^3 + e^(1/8)/2^3 + e^(1/12)/3^3 + e^(1/16)/4^3 + ・・・ ---①

さて、f(x)を x=0 周りでテイラー展開して、
f(x)=f(0) + f´(0)・x/1！ + f´´(0)・x^2/2！ + f´´´(0)・x^3/3！ + ・・・ ---②

ここで①式を次々に微分して、
f(x)=e^(x/1)/1^3 + e^(x/2)/2^3 + e^(x/3)/3^3 + e^(x/4)/4^3 + ・・・
f´(x)=e^(x/1)/1^4 + e^(x/2)/2^4 + e^(x/3)/3^4 + e^(x/4)/4^4 + ・・・
f´´(x)=e^(x/1)/1^5 + e^(x/2)/2^5 + e^(x/3)/3^5 + e^(x/4)/4^5 + ・・・
・
・
これらの x に 0 を代入すると、次のようになる。
f(0)=1/1^3 + 1/2^3 + 1/3^3 + 1/4^3 + ・・・=ζ(3)
f´(0)=1/1^4 + 1/2^4 + 1/3^4 + 1/4^4 + ・・・=ζ(4)
f´´(0)=1/1^5 + 1/2^5 + 1/3^5 + 1/4^5 + ・・・=ζ(5)

・

・

これらを②に代入すると次のようになる。

f(x)=ζ(3)＋ ζ(4)･x/1！ ＋ ζ(5)･x^2/2！ ＋ ζ(6)･x^3/3！ ＋ ･･･ ----③

上式の x に 1/4 を代入して次を得る。

f(1/4)=ζ(3)＋ ζ(4)･(1/4)/1！ ＋ ζ(5)･(1/4)^2/2！ ＋ ζ(6)･(1/4)^3/3！ ＋ ･･･ ---④

①と④より、次式が成り立つ。

e^(1/4)/1^3 + e^(1/8)/2^3 + e^(1/12)/3^3 + e^(1/16)/4^3 + ･･･

＝ζ(3)＋(1/4)^1･ζ(4)/1！＋(1/4)^2･ζ(5)/2！＋(1/4)^3･ζ(6)/3！＋(1/4)^4･ζ(7)/4！+･･･

１番目の目的の式が得られた。

全く同様にして今度は x に−1/4 を代入して計算すると、２番目の式が得られる。

e^(−1/4)/1^3 + e^(−1/8)/2^3 + e^(−1/12)/3^3 + e^(−1/16)/4^3 + ･･･

＝ζ(3)－(1/4)^1･ζ(4)/1！＋(1/4)^2･ζ(5)/2！－(1/4)^3･ζ(6)/3！＋(1/4)^4･ζ(7)/4！－ ･･･

［終わり］

e^(1/4)/1^3 + e^(1/8)/2^3 + e^(1/12)/3^3 + e^(1/16)/4^3 + ･･･

＝ζ(3)＋(1/4)^1･ζ(4)/1！＋(1/4)^2･ζ(5)/2！＋(1/4)^3･ζ(6)/3！＋(1/4)^4･ζ(7)/4！+･･･

e^(−1/4)/1^3 + e^(−1/8)/2^3 + e^(−1/12)/3^3 + e^(−1/16)/4^3 + ･･･

＝ζ(3)－(1/4)^1･ζ(4)/1！＋(1/4)^2･ζ(5)/2！－(1/4)^3･ζ(6)/3！＋(1/4)^4･ζ(7)/4！－ ･･･

このようなζ(3)の香りの漂う式が得られた。

数値計算も行ったが、正しい式となっている。

例えば、２番目の式（下側の式）の左辺と右辺が一致することを Excel を使い数値計算で確認したので示しておく。

まず左辺を１００万項まで計算すると、

左辺＝0.96138･･

次に右辺については、

右辺の２項まで=0.93147･･

右辺の３項まで=0.96388･･

右辺の４項まで=0.96123･･

右辺の５項まで=0.96139・・

と、たったの５項でほとんど一致してしまうのである。まとめておこう。

f(x)=e^(x/1)/1^3 + e^(x/2)/2^3 + e^(x/3)/3^3 + e^(x/4)/4^3 + ・・・

にテイラーシステムを適用。

[0 周りテイラー展開、1/4 代入]

e^(1/4)/1^3 + e^(1/8)/2^3 + e^(1/12)/3^3 + e^(1/16)/4^3 + ・・・

=ζ(3)＋(1/4)^1・ζ(4)/1！＋(1/4)^2・ζ(5)/2！＋(1/4)^3・ζ(6)/3！＋(1/4)^4・ζ(7)/4！+・・・

[0 周りテイラー展開、−1/4 代入]

e^(−1/4)/1^3 + e^(−1/8)/2^3 + e^(−1/12)/3^3 + e^(−1/16)/4^3 + ・・・

=ζ(3)－(1/4)^1・ζ(4)/1！＋(1/4)^2・ζ(5)/2！－(1/4)^3・ζ(6)/3！＋(1/4)^4・ζ(7)/4！－ ・・・

（杉岡幹生）