ゼータの香りの漂う式（その7） [テイラーシステム]

今回テイラーシステムを用いて、新たな「ゼータの香りの漂う式」を導きだすことができたので紹介したい。次の２式である。

$$e^{(1/4)}/1^2 + e^{(1/8)}/2^2 + e^{(1/12)}/3^2 + e^{(1/16)}/4^2 + \cdots$$
$$= \zeta(2) + (1/4)^1 \cdot \zeta(3)/1! + (1/4)^2 \cdot \zeta(4)/2! + (1/4)^3 \cdot \zeta(5)/3! + (1/4)^4 \cdot \zeta(6)/4! + \cdots$$

$$e^{(-1/4)}/1^2 + e^{(-1/8)}/2^2 + e^{(-1/12)}/3^2 + e^{(-1/16)}/4^2 + \cdots$$
$$= \zeta(2) - (1/4)^1 \cdot \zeta(3)/1! + (1/4)^2 \cdot \zeta(4)/2! - (1/4)^3 \cdot \zeta(5)/3! + (1/4)^4 \cdot \zeta(6)/4! - \cdots$$

e は自然対数の底（ネイピア数）である。

これらの左辺を見ると、$\zeta(2)$の香りが漂っていることがわかる。
$\zeta(s)$や $L(\chi,s)$など様々なゼータの特殊値を求める際に威力を発揮したテイラーシステムを用いると、いとも簡単にこれらの式を導くことができる。それを以下で示す。

＜ $\Sigma e^{(\pm 1/4n)}/n^2$ の導出 ＞

$$e^{(1/4)}/1^2 + e^{(1/8)}/2^2 + e^{(1/12)}/3^2 + e^{(1/16)}/4^2 + \cdots$$
$$= \zeta(2) + (1/4)^1 \cdot \zeta(3)/1! + (1/4)^2 \cdot \zeta(4)/2! + (1/4)^3 \cdot \zeta(5)/3! + (1/4)^4 \cdot \zeta(6)/4! + \cdots$$

$$e^{(-1/4)}/1^2 + e^{(-1/8)}/2^2 + e^{(-1/12)}/3^2 + e^{(-1/16)}/4^2 + \cdots$$
$$= \zeta(2) - (1/4)^1 \cdot \zeta(3)/1! + (1/4)^2 \cdot \zeta(4)/2! - (1/4)^3 \cdot \zeta(5)/3! + (1/4)^4 \cdot \zeta(6)/4! - \cdots$$

これらの式を導出する。

[導出]

$$f(x)=e^{(x/1)}/1^2 + e^{(x/2)}/2^2 + e^{(x/3)}/3^2 + e^{(x/4)}/4^2 + \cdots$$

という関数$f(x)$を考える。ここで x は任意の実数。

$f(x)$の x に 1/4 を代入して、

$$f(1/4)=e^{(1/4)}/1^2 + e^{(1/8)}/2^2 + e^{(1/12)}/3^2 + e^{(1/16)}/4^2 + \cdots \quad \text{-----①}$$

さて、$f(x)$を $x=0$ 周りでテイラー展開して、

$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x/1!+f''(0)\cdot x^2/2!+f'''(0)\cdot x^3/3!+\cdots$ ----②

ここで①式を次々に微分して、

$f(x)=e^{(x/1)}/1^2+e^{(x/2)}/2^2+e^{(x/3)}/3^2+e^{(x/4)}/4^2+\cdots$

$f'(x)=e^{(x/1)}/1^3+e^{(x/2)}/2^3+e^{(x/3)}/3^3+e^{(x/4)}/4^3+\cdots$

$f''(x)=e^{(x/1)}/1^4+e^{(x/2)}/2^4+e^{(x/3)}/3^4+e^{(x/4)}/4^4+\cdots$

$f'''(x)=e^{(x/1)}/1^5+e^{(x/2)}/2^5+e^{(x/3)}/3^5+e^{(x/4)}/4^5+\cdots$

・

・

これらの x に 0 を代入すると、次のようになる。

$f(0)=1/1^2+1/2^2+1/3^2+1/4^2+\cdots=\zeta(2)$

$f'(0)=1/1^3+1/2^3+1/3^3+1/4^3+\cdots=\zeta(3)$

$f''(0)=1/1^4+1/2^4+1/3^4+1/4^4+\cdots=\zeta(4)$

$f'''(0)=1/1^5+1/2^5+1/3^5+1/4^5+\cdots=\zeta(5)$

・

・

これらを②式に代入すると次のようになる。

$f(x)=\zeta(2)+\zeta(3)\cdot x/1!+\zeta(4)\cdot x^2/2!+\zeta(5)\cdot x^3/3!+\cdots$ ----③

上式の x に 1/4 を代入して次を得る。

$f(1/4)=\zeta(2)+\zeta(3)\cdot(1/4)/1!+\zeta(4)\cdot(1/4)^2/2!+\zeta(5)\cdot(1/4)^3/3!+\cdots$ ---④

①と④より、次式が成り立つ。

$e^{(1/4)}/1^2+e^{(1/8)}/2^2+e^{(1/12)}/3^2+e^{(1/16)}/4^2+\cdots$

$=\zeta(2)+(1/4)^1\cdot\zeta(3)/1!+(1/4)^2\cdot\zeta(4)/2!+(1/4)^3\cdot\zeta(5)/3!+(1/4)^4\cdot\zeta(6)/4!+\cdots$

まず１番目の目的の式が得られた。

また全く同様にして今度は上で x に−1/4 を代入し計算すると、２番目の目的の式が得られる。

$e^{(-1/4)}/1^2+e^{(-1/8)}/2^2+e^{(-1/12)}/3^2+e^{(-1/16)}/4^2+\cdots$

$=\zeta(2)-(1/4)^1\cdot\zeta(3)/1!+(1/4)^2\cdot\zeta(4)/2!-(1/4)^3\cdot\zeta(5)/3!+(1/4)^4\cdot\zeta(6)/4!-\cdots$

[終わり]

$e^{(1/4)}/1^2+e^{(1/8)}/2^2+e^{(1/12)}/3^2+e^{(1/16)}/4^2+\cdots$

$=\zeta(2)+(1/4)^1\cdot\zeta(3)/1!+(1/4)^2\cdot\zeta(4)/2!+(1/4)^3\cdot\zeta(5)/3!+(1/4)^4\cdot\zeta(6)/4!+\cdots$

$$e^{(-1/4)}/1^2 + e^{(-1/8)}/2^2 + e^{(-1/12)}/3^2 + e^{(-1/16)}/4^2 + \cdots$$

$$=\zeta(2) - (1/4)^1\cdot\zeta(3)/1! + (1/4)^2\cdot\zeta(4)/2! - (1/4)^3\cdot\zeta(5)/3! + (1/4)^4\cdot\zeta(6)/4! - \cdots$$

このような優雅な“$\zeta(2)$の香りが漂う式”が全く簡単に得られたことに驚かれるであろう。
上式は、前回までに見た

$$1/(1^2+a^2) + 1/(2^2+a^2) + 1/(3^2+a^2) + 1/(4^2+a^2) + \cdots$$

$$= -1/(2a^2) + (\pi/(2a))\cdot(e^{(2a\pi)}+1)/(e^{(2a\pi)}-1)$$

などとはまた違ったゼータの香りが漂っている。

今回用いた方法ではゼータの関数等式さえ必要ないのであった。以前、テイラーシステムを用いて奇数ゼータなどを求めた際には必ず途中で関数等式を用いたのであるが。
今回の導出のポイントとして、まず

$$f(x)=e^{(x/1)}/1^2 + e^{(x/2)}/2^2 + e^{(x/3)}/3^2 + e^{(x/4)}/4^2 + \cdots$$

という形の式を用いたことが挙げられる。さらに $x=0$ 周りで展開したこともさらなる工夫である。
これらの工夫の上にテイラーシステムを用いたのであった。
x に $1/4$ を代入したのは数値的な検証をしやすく(収束を速く)するためである。別に $x=1/2$ でも $x=1/3$ でももちろんOKだが。

数値計算も行ったが、正しい式となっている。
例えば、2番目の式の左辺と右辺が一致することを Excel を使い数値計算で確認したので示しておく。
まず左辺を100万項まで計算すると、
左辺=1.37569・・
となる。
次に右辺を見ると、
右辺の2項まで=1.34441・・
右辺の3項まで=1.37824・・
右辺の4項まで=1.37554・・
右辺の5項まで=1.37570・・
と、たったの5項でほとんど一致してしまう。右辺の収束は異常に速いのである。まとめておこう。

$f(x)=e^{x/1}/1^2+e^{x/2}/2^2+e^{x/3}/3^2+e^{x/4}/4^2+\cdots$

にテイラーシステムを適用。

[0 周りテイラー, 1/4 代入]

$e^{1/4}/1^2+e^{1/8}/2^2+e^{1/12}/3^2+e^{1/16}/4^2+\cdots$

$=\zeta(2)+(1/4)^1\cdot\zeta(3)/1!+(1/4)^2\cdot\zeta(4)/2!+(1/4)^3\cdot\zeta(5)/3!+(1/4)^4\cdot\zeta(6)/4!+\cdots$

[0 周りテイラー, −1/4 代入]

$e^{-1/4}/1^2+e^{-1/8}/2^2+e^{-1/12}/3^2+e^{-1/16}/4^2+\cdots$

$=\zeta(2)-(1/4)^1\cdot\zeta(3)/1!+(1/4)^2\cdot\zeta(4)/2!-(1/4)^3\cdot\zeta(5)/3!+(1/4)^4\cdot\zeta(6)/4!-\cdots$

（杉岡幹生）