

ゼータの香りの漂う式（その3）

ここでは $\pi/2$ と $3\pi/2$ を代入した場合を調べることにする。フーリエ級数

$$(\pi-x)/2 = \sin x/1 + \sin 2x/2 + \sin 3x/3 + \sin 4x/4 + \dots \quad (0 < x < 2\pi)$$

の両辺に $\int_0^x e^{ax}$ を作用させて得られる式の x に $\pi/2$ と $3\pi/2$ を代入すると、次の新しい2式（ゼータの香りの漂う式）が導出される。ここで a は任意の実数である。

$$\begin{aligned} 1/(2^2+a^2) - 1/(4^2+a^2) + 1/(6^2+a^2) - 1/(8^2+a^2) + \dots \\ = 1/(2a^2) - (\pi/(2a)) \cdot (e^{(3a\pi/2)} + e^{(a\pi/2)}) / (e^{(2a\pi)} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1/(1^2+a^2) - 3/(3^2+a^2) + 5/(5^2+a^2) - 7/(7^2+a^2) + \dots \\ = (\pi/2) \cdot (e^{(3a\pi/2)} - e^{(a\pi/2)}) / (e^{(2a\pi)} - 1) \end{aligned}$$

これらは、 $\pi/2$ 代入と $3\pi/2$ 代入というこのペアの代入によって導出される（ $\pi/2 + 3\pi/2 = 2\pi$ の関係）。
試みに a に 2 を代入すると上式は次のようになる。

$$1/(2^2+4) - 1/(4^2+4) + 1/(6^2+4) - 1/(8^2+4) + \dots = 1/8 - (\pi/4) \cdot (e^{(3\pi)} + e^{\pi}) / (e^{(4\pi)} - 1)$$

$$1/(1^2+4) - 3/(3^2+4) + 5/(5^2+4) - 7/(7^2+4) + \dots = (\pi/2) \cdot (e^{(3\pi)} - e^{\pi}) / (e^{(4\pi)} - 1)$$

これらの美しい式の導出過程を以下に示す。

【導出】

$$\begin{aligned} \text{フーリエ級数} \quad (\pi-x)/2 = \sin x/1 + \sin 2x/2 + \sin 3x/3 + \sin 4x/4 + \dots \quad \text{----①} \\ (0 < x < 2\pi) \end{aligned}$$

を出発点とする。①の左右両辺に作用素 $\int_0^x e^{ax}$ を作用させて（後ろに dx は付く）、求めていく。

まず①の左辺に $\int_0^x e^{ax}$ を作用させる。

$$\int_0^x e^{ax} \cdot (\pi-x)/2 \, dx = ((x-\pi)/(2a)) \cdot e^{ax} - \pi/(2a) + (e^{ax}-1)/(2a^2) \quad \text{----②}$$

次に①の右辺に着目する。まず $\sin(nx)/n$ に作用素を適用すると（部分積分を2回行つて）

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{ax} \cdot (\sin(nx)/n) \, dx \\ = a \cdot \sin(nx) \cdot e^{ax} / (n(n^2+a^2)) - \cos(nx) \cdot e^{ax} / (n^2+a^2) + 1/(n^2+a^2) \quad \text{----③} \end{aligned}$$

となる。①の右辺の各項に項別積分を適用して次を得る。

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{ax} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (\sin(nx)/n) \, dx \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \{ 1/(n^2+a^2) - \cos(nx) \cdot e^{ax} / (n^2+a^2) - a \cdot \sin(nx) \cdot e^{ax} / (n(n^2+a^2)) \} \quad \text{----④} \end{aligned}$$

①の両辺に $\int (0 \sim x) e^{ax}$ を作用させた結果が②と④であるから②=④となって、

$$\begin{aligned} & ((x-\pi)/(2a)) \cdot e^{ax} - \pi/(2a) + (e^{ax}-1)/(2a^2) \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \{1/(n^2+a^2) - \cos(nx) \cdot e^{ax}/(n^2+a^2) - a \cdot \sin(nx) \cdot e^{ax}/(n(n^2+a^2))\} \quad \text{----⑤} \end{aligned}$$

ここで⑤に x に $\pi/2$ を代入して整理すると次のようになる。

$$aA + B = \pi/(4a) - (\pi/a) \cdot e^{-a\pi/2} + (1/(2a^2)) - (\pi/a) \cdot e^{-a\pi/2}/(e^{2a\pi}-1) \quad \text{----⑥}$$

また、⑤に x に $3\pi/2$ を代入して整理すると次のようになる。

$$-aA + B = -\pi/(4a) - (\pi/a) \cdot e^{-3a\pi/2} + (1/(2a^2)) - (\pi/a) \cdot e^{-3a\pi/2}/(e^{2a\pi}-1) \quad \text{----⑦}$$

ここで、 $A=1/(1^2+a^2) - 1/(3^2+a^2) + 1/(5^2+a^2) - 1/(7^2+a^2) + \dots$,

$$B=1/(2^2+a^2) - 1/(4^2+a^2) + 1/(6^2+a^2) - 1/(8^2+a^2) + \dots$$

とした。

なお、⑥、⑦を導く整理の途中で 2π 代入で導出した式

$$\begin{aligned} & 1/(1^2+a^2) + 1/(2^2+a^2) + 1/(3^2+a^2) + 1/(4^2+a^2) + \dots \\ & = -1/(2a^2) + (\pi/(2a)) \cdot (e^{2a\pi}+1)/(e^{2a\pi}-1) \end{aligned}$$

を使用した。

さて、⑥、⑦は A と B に関する連立方程式となっているから、これを解いて次を得る。

$$A = \pi/(4a^2) - (\pi/2a^2) \cdot (e^{3a\pi/2} - e^{a\pi/2})/(e^{2a\pi}-1)$$

$$B = 1/(2a^2) - (\pi/(2a)) \cdot (e^{3a\pi/2} + e^{a\pi/2})/(e^{2a\pi}-1)$$

つまり、

$$\begin{aligned} & 1/(1^2+a^2) - 1/(3^2+a^2) + 1/(5^2+a^2) - 1/(7^2+a^2) + \dots \\ & = \pi/(4a^2) - (\pi/2a^2) \cdot (e^{3a\pi/2} - e^{a\pi/2})/(e^{2a\pi}-1) \quad \text{----⑧} \end{aligned}$$

$$1/(2^2+a^2) - 1/(4^2+a^2) + 1/(6^2+a^2) - 1/(8^2+a^2) + \dots$$

$$= 1/(2a^2) - (\pi/(2a)) \cdot (e^{3a\pi/2} + e^{a\pi/2})/(e^{2a\pi}-1) \quad \text{----⑨}$$

となる。

⑨は目的の式に達しており、これで OK である。⑧はさらに変形、簡潔化できる。⑧左辺は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} & 1/(1^2+a^2) - 1/(3^2+a^2) + 1/(5^2+a^2) - 1/(7^2+a^2) + \dots \\ & = (1/a^2)[1\{1/1^2-1/(1^2+a^2)\} - 3\{1/3^2-1/(3^2+a^2)\} + 5\{1/5^2-1/(5^2+a^2)\} - 7\{1/7^2-1/(7^2+a^2)\} + \dots] \\ & = (1/a^2)[(1-1/3+1/5-1/7+\dots) - \{1/(1^2+a^2) - 3/(3^2+a^2) + 5/(5^2+a^2) - 7/(7^2+a^2) + \dots\}] \\ & = (1/a^2)[\pi/4 - \{1/(1^2+a^2) - 3/(3^2+a^2) + 5/(5^2+a^2) - 7/(7^2+a^2) + \dots\}] \\ & = \pi/(4a^2) - (1/a^2)\{1/(1^2+a^2) - 3/(3^2+a^2) + 5/(5^2+a^2) - 7/(7^2+a^2) + \dots\} \end{aligned}$$

途中で、 $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots = \pi/4$ を使用した ($L(1) = \pi/4$)。

この変形と⑧を合わせると、簡単に

$$1/(1^2+a^2) - 3/(3^2+a^2) + 5/(5^2+a^2) - 7/(7^2+a^2) + \dots = (\pi/2) \cdot (e^{(3a\pi/2)} - e^{(a\pi/2)}) / (e^{(2a\pi)} - 1)$$

が出る。冒頭でも見た目的の式が導出できた。

[終わり]

$$1/(2^2+a^2) - 1/(4^2+a^2) + 1/(6^2+a^2) - 1/(8^2+a^2) + \dots$$

$$= 1/(2a^2) - (\pi/(2a)) \cdot (e^{(3a\pi/2)} + e^{(a\pi/2)}) / (e^{(2a\pi)} - 1)$$

$$1/(1^2+a^2) - 3/(3^2+a^2) + 5/(5^2+a^2) - 7/(7^2+a^2) + \dots$$

$$= (\pi/2) \cdot (e^{(3a\pi/2)} - e^{(a\pi/2)}) / (e^{(2a\pi)} - 1)$$

今回はこれらの式を導出した。上式はリーマン・ゼータ $\zeta(s)$ に対応し、下式は $L(s)$ ゼータに対応していることはすぐにわかるであろう。

$$\zeta(s) = 1 + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + \dots$$

$$L(s) = 1 - 1/3^s + 1/5^s - 1/7^s + \dots$$

$\zeta(s)$ も $L(s)$ もどちらもディリクレの L 関数 $L(\chi, s)$ という一般的なゼータ関数の一種である。整数論においてきわめて重要なディリクレの L 関数 $L(\chi, s)$ は次のように定義される。ディリクレ指標 $\chi(a)$ に対応して $L(\chi, s)$ は色々変わる。

$$L(\chi, s) = \chi(1)/1^s + \chi(2)/2^s + \chi(3)/3^s + \chi(4)/4^s + \chi(5)/5^s + \chi(6)/6^s + \dots$$

ディリクレ指標 $\chi(a)$ は、ある自然数 N について次の3条件を満たす。

$$(1) a \equiv b \pmod{N} \text{ なら } \chi(a) = \chi(b)$$

$$(2) \chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$$

$$(3) a \text{ と } N \text{ が共通の素因数を持つときに限り、} \chi(a) = 0$$

ここで $a \equiv b \pmod{N}$ とは、 $a-b$ が N で割り切れることを指す。すなわち、 a を N で割った余りと、 b を N で割った余りが等しいことを意味する。

$L(s)$ は $L(\chi, s)$ の $a \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$ に対しそれぞれ $\chi(a) = 0, 1, 0, -1$ としたときの $L(\chi, s)$ に一致する。 $\zeta(s)$ は全ての a に対し $\chi(a) = 1$ としたときの $L(\chi, s)$ であり、 $L(s)$ は $a \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$ に対しそれぞれ $\chi(a) = 0, 1, 0, -1$ としたときの $L(\chi, s)$ に一致する。

$L(s)$ のディリクレ指標 $\chi(a)$ すなわち「 $a \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$ に対しそれぞれ $\chi(a) = 0, 1, 0, -1$ 」が、3条件を満たしていることを確認いただきたい。このとき $N=4$ であり、 N を導手と呼ぶ。導手は $\chi(a)$ を特徴づける最小単位となっている。 $L(s)$ の $\chi(a)$ の導手は 4 である。 $L(s)$ 関連で最も有名な公式は

$$1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots = \pi/4$$

であろう。これは $L(1) = \pi/4$ であり、 $L(s)$ の特殊値として現れているのである。 $L(1) = \pi/4$ は、上記[導出]でも使用したことにも注意いただきたい。なお、 $\zeta(s)$ の導手 N は 1 である。

以前の結果も合わせてまとめておこう。

フーリエ級数

$$(\pi - x)/2 = \sin x/1 + \sin 2x/2 + \sin 3x/3 + \sin 4x/4 + \dots \quad (0 < x < 2\pi)$$

に $\int (0 \sim x) e^{ax}$ を作用させ x にある数を代入すると、以下の式が得られる。(a は任意の実数)

[2 π 代入]

$$1/(1^2 + a^2) + 1/(2^2 + a^2) + 1/(3^2 + a^2) + 1/(4^2 + a^2) + \dots = -1/(2a^2) + (\pi/(2a)) \cdot (e^{(2a\pi)+1})/(e^{(2a\pi)} - 1)$$

[π 代入]

$$1/(1^2 + a^2) + 1/(3^2 + a^2) + 1/(5^2 + a^2) + 1/(7^2 + a^2) + \dots = (\pi/(4a)) \cdot (e^{(a\pi)} - 1)/(e^{(a\pi)} + 1)$$

$$1/(2^2 + a^2) + 1/(4^2 + a^2) + 1/(6^2 + a^2) + 1/(8^2 + a^2) + \dots = -1/(2a^2) + (\pi/(4a)) \cdot (e^{(a\pi)} + 1)/(e^{(a\pi)} - 1)$$

[$\pi/2$ 代入 & $3\pi/2$ 代入]

$$\begin{aligned} 1/(2^2 + a^2) - 1/(4^2 + a^2) + 1/(6^2 + a^2) - 1/(8^2 + a^2) + \dots \\ = 1/(2a^2) - (\pi/(2a)) \cdot (e^{(3a\pi/2)} + e^{(a\pi/2)})/(e^{(2a\pi)} - 1) \end{aligned}$$

$$1/(1^2 + a^2) - 3/(3^2 + a^2) + 5/(5^2 + a^2) - 7/(7^2 + a^2) + \dots = (\pi/2) \cdot (e^{(3a\pi/2)} - e^{(a\pi/2)})/(e^{(2a\pi)} - 1)$$

今回、 $k\pi/2$ 代入 ($\pi/2$ & $3\pi/2$ 代入) で別のゼータの香りの漂う式を導いた。

では $k\pi/3$ を代入すると、どのような式が導出されるのだろうか？ それは次回調べることにする。(杉岡幹生)